Principiul dualității în logica formală

LOGOS

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ

COLECȚIE ÎNGRIJITĂ DE PROF. DR. GHEORGHE ENESCU

LOGOS

PETRE BIELTZ

Principiul dualităţii în logica formală

EDITURA ŞTIINŢIFICĂ • BUCUREŞTI 1974



COPERTA COLECŢIEI VASILE SOCOLIUC

PREFAȚĂ

A existat o perioadă în istoria logicii cînd domina opinia după care știința inițiată de Aristotel era socotită ca încheiată, cînd se considera că a spune ceva nou nu înseamnă mai mult decît a folosi cuvinte noi pentru probleme de mult elucidate. Dar, la jumătatea secolului trecut, aplicarea metodelor matematicilor în studiul problemelor de logică a produs o veritabilă cotitură, atît sub aspectul direcțiilor noi pe care s-au înscris investigațiile, cît și sub acela al interesului pe care îl stîrnește de atunci această știință. Deși cu antecedente mult mai vechi, a apărut acum o nouă ramură a logicii care, prin rezultatele surprinzătoare la care a ajuns în comparație cu logica clasică, nu de puține ori a fost privită ca o nouă știință. Logica simbolică a conferit o mai mare rigoare și subtilitate teoriei, a lărgit considerabil domeniul investigațiilor logice, a adus în discuție probleme noi, iar în ultima vreme a conturat din ce în ce mai precis o dimensiune nemijlocit aplicativă pentru ceea ce Aristotel numise știință a demonstrației. În acest fel, logica modernă a progresat deosebit de rapid, a devenit un subiect extrem de specializat care dispune de o atît de largă literatură tehnică încît vechea opinie a fost înlocuită cu o alta după care puține opere de bază în acest domeniu pot ocoli un compromis între lărgimea și adîncimea tratării.

Printre problemele noi pe care logica modernă le-a adus în discuție se află și aceea care constituie obiectul prezentei noastre lucrări. Nu poate exista îndoială că sesizarea principiului dualității ca o problemă de logică este un merit al logicii simbolice, după cum nu putem nega că acest principiu a fost cunoscut și

aplicat mai înainte în matematici. Semnalat în secolul trecut de Augustus De Morgan și mai ales de E. Schröder, principiul dualității nu a făcut de atunci decît obiectul unor scurte referințe, uneori doar trecătoare, în cărțile de logică și din cîte cunoaștem nu s-a bucurat de atenție specială din partea logicienilor.

Analiza pe care am făcut-o asupra relațiilor dintre anumite conexiuni logice — operatorii logicii propozițiilor — ne-a condus la ideea că principiul dualității, nu numai că are largi implicații în teoria logică în genere, dar el constituie o chestiune majoră și dincolo de granițele științei logicii. Importanța unei cercetări mai largi a relației de dualitate se explică prin aceea că ea ne permite descoperirea unor raporturi logice noi, o explicație mai adecvată a unor legături logice și o discuție mai adîncă a raportului dintre logica modernă și cea clasică, a celui dintre logică și știința matematicilor, dar și prin perspective nemijlocit aplicativă a rezultatelor obținute în studiul principiului dualității. În acest ultim sens cităm, cu exemple doar, posibilitatea de simplificare a sistemului logicii moderne, aplicațiile principiului dualității în programarea liniară în legătură cu problemele de optimizare, sau în teoria contactelor electrice. Mai mult, pe linia legăturilor strînse dintre dualitate și simetrie, analiza logică a principiului dualității este de un mare interes și pentru filosofie, de exemplu în legătură cu ipoteza lui Yang și Lee, confirmată experimental, cu privire la violarea principiului parității la nivel subatomic. În această lucrare noi ne ocupăm doar de implicațiile logice ale principiului dualității și sperăm ca ea să convingă de necesitatea unei teorii logice a dualității.

•

Subiectul prezentei lucrări mă preocupă încă din anul 1966. În toată această perioadă am beneficiat de sfaturile și observațiile critice ale profesorilor Petre Botezatu de la Universitatea A. I. Cuza din Iași, Ion Didilescu, Gheorghe Enescu, Radu Stoichiță — de la Universitatea din București, cărora le aduc și pe această cale sincere mulțumiri. O parte a rezultatelor la care am ajuns și-au găsit expresie în teza mea de doctorat (Universitatea din București, iunie 1972), pe care am finalizat-o în perioada unui stagiu de specializare la University College London, cînd, sub îndrumarea profesorului Richard Wollheim, șeful Departamentu-

lui de Filosofie, am avut utile schimburi de opinii pe această temă cu Dr. Chris Wright, Hydé Ishiguro de la același Colegiu și cu Dr. Wilfrid Hogges de la Bedford College London, cărora țin, de asemenea, să le mulțumesc. Se înțelege însă că pentru toate cele susținute în lucrare sînt singur răspunzător.

ianuarie 1973

P. BIELTZ

INTRODUCERE

Această lucrare este o încercare de a analiza, cu mijloacele logicii moderne, principiul dualității. Dezvăluirea manifestărilor logice ale principiului dualității este, fără îndoială, o chestiune datorată exclusiv logicii moderne, dar implicațiile problemelor dualității depășesc granițele științei logicii. Se pare că principiul dualității este esențial legat de acele domenii ale cunoașterii pe care le putem clasifica sub numele de științe formale.

Înainte însă de a încerca, chiar și în linii generale, să ne oprim asupra implicațiilor principiului dualității, e necesar să precizăm ce se înțelege prin *dualitate*. Procedînd, evident într-o manieră destul de largă, putem spune că prin *dualitate* se înțelege o relație, o legătură între două clase de elemente. Ca obiecte ale relației de dualitate, cele două clase poartă numele de *duali*. Această relație este o corespondență astfel constituită încît fiecărui element din prima clasă îi corespunde un element în cea de a doua clasă și fiecărui element din cea de a doua clasă îi corespunde un element în prima clasă.

Mai precis, dacă este dată o anumită clasă A ale cărei elemente sînt x, y și z, astfel încît această ordine a lor este caracteristică pentru clasa A și dacă înlocuim fiecare element al clasei A cu complementarul său, obținem o nouă clasă, clasa B, ale cărei elemente sînt z', y' și x', așezate într-un nou șir, într-o ordine inversă față de cea caracteristică clasei A, dar fiecare element din mulțimea B păstrează o poziție simetrică față de corelativul său din clasa A, vom spune că A și B sînt clase duale, sau că între ele există un raport de dualitate.

Deși problematica dualității nu este inclusă în toate cărțile moderne de logică, totuși, utilizarea metodelor formale, specifice logicii simbolice, au permis să se remarce că, principiul dualității, de mult devenit familiar pentru matematică, își află o manifestare specifică la nivelul științei logicii. Tocmai cu scopul de a indica punctele de referință din perspectiva cărora înțelegem să vorbim de o manifestare specifică a principiului dualității în cadrul teoriei logice, socotim necesar ca acum la început să ne oprim mai întîi, evident pe scurt, asupra a ceea ce noi înțelegem prin obiectul și natura științei logicii.

1. LOGICA

Dacă ținem seamă de faptul, unanim acceptat, că momentul constituirii logicii ca știință de sine stătătoare coincide cu apariția *Organon*-ului aristotelic, în mod firesc urmează concluzia că logica este una dintre științele cu cea mai îndelungată istorie, întrucît acest moment este plasat cu mai bine de două milenii în urmă. Dar pe cît de lungă este istoria logicii, ea este tot pe atît de bogată și deși I. Kant o declara încheiată chiar de la debutul ei, epoca modernă a făcut dovada incontestabilă că, tocmai această știință a cărei distincție ține, printre altele, de perenitatea conceptelor sale, se află și astăzi într-o continuă dezvoltare.

O privire cît de generală asupra acestei istorii milenare a științei logicii, nu poate să nu recunoască cel puțin două etape distincte de constituire a acestei istorii. Prima etapă începe, așa cum arătam, cu lucrarea lui Aristotel, *Organon*, a doua debutează în secolul XIX prin lucrările matematicienilor englezi G. Boole și A. De Morgan. Ceea ce a caracterizat cea de a doua etapă în dezvoltarea logicii, a fost utilizarea unor metode cu totul noi pentru teoria logică, a unor metode obișnuite pînă atunci numai pentru știința matematicii.

În plus, rezultatul utilizării acestor metode în investigarea și expunerea problemelor de logică a fost atît de nou, atît de diferit prin puterea și subtilitatea cercetării față de ceea ce era familiar logicii tradiționale, încît, așa cum arată W. Quine, nu în mod nejustificat noile metode și noile rezultate au fost și mai sînt și astăzi încă privite ca definitorii pentru o nouă știință [43 p. 1]. Apărută la jumătatea secolului XIX,

logica simbolică a înregistrat de atunci o puternică dezvoltare și diversificare, dar constituirea ei ca disciplină logică distinctă nu a însemnat sfîrșitul logicii inițiată de Aristotel. Este un lucru obișnuit pentru mulți autori, dar nu pentru toți, să recunoască astăzi existența a două discipline logice: *logica formală clasică* — logica de tradiție aristotelică și *logica formală modernă* — logica simbolică. Dar existența a două discipline logice distincte a fost recunoscută în mod diferit de către logicieni diferiți. De multe ori aceste deosebiri de opinie țin atît de punctul de vedere asupra specificului și finalității științei logicii, cît și de perspectiva filosofică acceptată, explicit sau nu, de un logician sau altul.

Trecerea în revistă a acestor opinii nu ține de scopul lucrării. Anterior noi ne-am exprimat punctul de vedere [8] asupra acestor chestiuni, iar acum arătăm că nu acceptăm poziția după care una dintre cele două discipline logice s-ar substitui celeilalte ca singura teorie logică veritabilă. Noi acceptăm opinia după care logica tradițională și logica simbolică sînt două dimensiuni diferite ale unei științe unice: știința logicii [26 p. 29]

Dezvoltarea și diversificarea contemporană a științei logicii a readus în actualitate chestiuni legate de explicitarea naturii și a obiectului logicii. În legătură cu aceasta a devenit un loc comun a cita cele spuse de Ch. Peirce cu privire la faptul că pînă în prezent deși logicii i s-au dat mai bine de o sută de definiții, nici una dintre ele nu este unanim acceptată și în plus a afirma că întîlnim aici o situație paradoxală: tocmai știința care, printre altele, studiază definiția, tocmai ea nu dispune de o definiție satisfăcătoare. De aceea, pare firesc a accepta opinia lui A. N. Prior, care spunea că cea mai bună cale de a defini logica este de a face logică [42 p. 1] și numai după ce ne-am familiarizat cu problematica logicii să încercăm, cum susține B. Mates, să ne facem o opinie despre ce este logica [35 p. 1—3]. Situația aceasta, departe de a fi caracteristică numai pentru logică, o reîntîlnim, într-un fel, la toate acele științe a căror istorie nu numai că nu e încheiată, dar a cărei constituire este în plină desfășurare. În acest fapt își află rațiunea asertiunea lui H. B. Curry, după care delimitarea unei științe trebuie înlocuită cu precizarea problemelor ei fundamentale, lăsînd ca aceste limite să cadă acolo unde s-o întîmpla [15 p. 18].

Noi nu avem intenţia de a susţine că cele afirmate de Aristotel la începutul *Analiticilor Prime*, atunci cînd caracteriza obiectul preocupărilor sale drept *ştiinţă a demonstraţiei* [An. pr. I, 1, 24 a] ar fi o definiţie complexă şi completă a ştiinţei logicii, dar credem că înţelesul cuvintelor sale caracterizează în mod esenţial obiectul logicii, indiferent dacă ne referim la logica de tradiţie aristotelică sau la logica simbolică. Pornind de aici, noi respingem atît absolutizarea afirmaţiei lui J. Lukasiewicz după care logica n-ar avea de a face cu gîndirea mai mult decît are de a face cu ea matematica [33 p. 12], cît şi opinia care reduce logica simbolică la o simplă aplicaţie a matematicii la studiul problemelor de logică. Fără a ne situa pe o poziţie logicistă, matematica a făcut şi face apel la logică, în forma ei clasică sau modernă, pentru explicitarea conceptelor sale fundamentale, a demersului gîndirii matematice. În această perspectivă, adică în măsura în care fundamentele matematicii ar fi definite prin mijloacele matematicii însăşi, chiar dacă nu e vorba de matematica pură ci de una aplicată, nu cumva întreaga problematică logică a fundamentelor matematicii s-ar reduce la o tautologie, la o definiţie *idem per idem*? Dacă metodele sînt asemănătoare, dacă uneori chiar simbolurile utilizate de logică şi matematică au aceeaşi formă grafică, nu trebuie să conchidem identitatea celor două ştiinţe, căci nu forma grafică a simbolurilor este importantă, ci semnificaţia lor.

Logica simbolică şi matematica sînt două ştiinţe diferite, dar ca ştiinţe diferite ele se presupun în mod reciproc. Fără îndoială că la debutul său, pînă şi-a elaborat un limbaj propriu şi metode specifice, logica simbolică a făcut apel la matematică şi nu poate fi negat că exemplul matematicilor a fost un veritabil catalizator pentru dezvoltarea noii discipline logice. La rîndul ei, ştiinţa matematicii presupune ştiinţa logicii, căci pentru matematică conceptul de demonstraţie este fundamental şi definitoriu, în sensul de mijloc de constituire. Departe de a nega rolul pe care intuiţia îl are în matematică, nu putem să nu fim de acord cu acei autori după care, dacă o teoremă poate fi sesizată prin intermediul intuiţiei, finalizarea ei ca teoremă în cadrul sistemului matematicii se face pe calea unei demonstraţii [41, p. 7]. Legătura care există între logica modernă şi matematică nu poate fi înţeleasă ca o reducere a logicii simbolice la o ramură a matematicii.

În același timp însă, nu putem să nu recunoaștem că aspectul extrem de riguros și tehnic al logicii simbolice o face pe aceasta din urmă extrem de asemănătoare matematicii, deși această asemănare nu este o premisă suficientă care să impună cu necesitate concluzia identificării dintre logica simbolică și o ramură a matematicii. Tocmai cu scopul de a prezenta un punct de distincție între logica simbolică și matematică credem că este util să ne referim la ceea ce P. R. Halmos numește logică algebrică [22 p. 3—10].

Astfel, autorul citat, după ce remarcă interesul deosebit pe care îl prezintă logica simbolică, parțial datorită noilor și surprinzătoarelor ei aplicații, distinge logica algebrică ca un intermediar între logica simbolică și matematică. După opinia sa, logica algebrică este o abordare modernă a unora dintre problemele logicii simbolice și a altora din teoria algebrelor booleene. Logica algebrică este înțeleasă ca o ramură a matematicii pure, dar ea nu se identifică și nu se substituie logicii formale.

Folosind exemplul fizicii, P. R. Halmos arată că de multe ori o teorie desemnată la început ca o unealtă pentru studiul unei probleme fizice, a dobîndit treptat un interes matematic pur. Cînd aceasta se întîmplă, teoria devine de obicei o modalitate generalizată dincolo de punctele cerute pentru aplicații, generalizările fac contact cu alte teorii (în mod frecvent în direcții complet neașteptate), iar prin subiectul ei ea se stabilește ca o nouă parte a matematicii pure. Partea matematicii pure astfel creată nu pretinde (și nu cere) să rezolve problema fizică care a generat-o; ea trebuie să se mențină sau să cadă în virtutea propriilor ei merite.

Fizica nu constituie însă singura sursă externă pentru teoriile matematice; alte discipline, așa cum ar fi economia politică sau biologia, pot juca un rol similar. Un recent (și probabil surprinzător) adaos la colecția catalizatorilor matematicii este logica formală; ramura matematicii care i s-a dedicat este considerată de P. R. Halmos tocmai logica algebrică.

Dar dacă logica algebrică, la dezvoltarea căreia o contribuție remarcabilă au adus Curry, Henkin, Rasiowa, Sikorski și Tarski, pleacă de la anumite considerații logice speciale, dacă ea abstrage din ele, dacă le plasează într-un context algebric general și dacă, pe calea generalizării, face contact cu alte ramuri ale matematicii (cum ar fi topologia și analiza

funcțională) nu înseamnă că asta ar justifica un semn de egalitate între logica algebrică și logica simbolică. Logica algebrică nu cere să rezolve nici una dintre problemele care îi preocupă pe logicieni. Ea pretinde doar că e o ramură a matematicii pure în cadrul căreia, conceptele care constituie scheletul logicii simbolice moderne pot fi discutate într-un limbaj algebric.

După cum arată P. R. Halmos, logica algebrică este abia la început și nu dispune încă de o literatură prea bogată, dar existența ei ca un intermediar între logica simbolică și matematică este în concepția noastră un argument pentru a susține logica simbolică ca o parte a științei logicii și nu ca o ramură a matematicii.

În faptul de a fi știință a demonstrației, logica își află nu numai explicitarea obiectului ei, dar și criteriul de deosebire față de celelalte științe și chiar față de matematică. Orice știință și matematica prin excelență, utilizează diverse proceduri de demonstrație, de argumentare, atît în procesul investigării cît și în cel de justificare a propozițiilor care alcătuiesc teoria. Dacă pentru orice știință procedurile de demonstrație sînt unelte de investigare sau de explicitare, pentru logică demonstrația, cu toate speciile sale, este chiar obiect de studiu. Pe această cale noi înțelegem să explicăm nu numai specificul științei logicii, ci și raportul dintre logică și celelalte științe, dintre logica simbolică și matematică și chiar raportul dintre logica de tradiție aristotelică și logica simbolică.

Dezvoltarea și diversificarea contemporană a cercetărilor de logică, în special a celor ce țin de logica simbolică, au dus la formularea unor opinii diverse privind natura logicii simbolice, relațiile ei cu logica de tradiție aristotelică sau cu matematica. Aici, noi dorim doar să afirmăm că acceptăm punctul de vedere al acelor logicieni care susțin că singurul obiect al logicii simbolice este tot logica, adică principiile care guvernează validitatea inferentelor. În continuare, urmînd firul acelorași idei, susținem că deosebirea dintre logica de tradiție aristotelică și logica simbolică nu este decît o deosebire accidentală [32 p. 3]. Această deosebire este accidentală pentru că ține de metodele utilizate de cele două discipline logice și nu de o eventuală divergență ce ar proveni din obiectul lor. Logica de tradiție aristotelică are un caracter formal, pentru că în calitatea ei de logică ea face abstracție de conținutul concret determinat al formelor logice studiate, pentru că ea studiază

formele gîndirii din punctul de vedere al mecanismului lor necesar, adică le studiază ca forme constituite în conexiunea și derivabilitatea lor necesară și nu sub aspectul mecanismului natural de constituire a lor [25 p. 230—231]. Logica de tradiție aristotelică dispune de metodele ei specifice, care, la un loc, pot fi caracterizate drept un procedeu formal. Utilizarea acestui procedeu formal adecvat formelor de gîndire pe care ea le studiază, a permis logicii de tradiție aristotelică să ajungă la o serie de concluzii specifice referitoare la cele mai generale dintre formele de gîndire. Dar atît în etapa investigării, cît și în cea a expunerii teoriei, logica de tradiție aristotelică nu ajunge la formalizare, la calcul logic și aceasta ține în primă instanță de faptul că procedeul formal utilizat de ea nu este un procedeu total. Dar toate acestea nu trebuie înțelese ca o lipsă, ca o limitare, ca o insuficiență a logicii de tradiție aristotelică ca dimensiune a științei logicii. Procedeul formal utilizat de logica de tradiție aristotelică nu este total prin raportare la știința logicii în general, dar este total adecvat în raport cu principiile și formele de gîndire care îi constituie obiectul de studiu. Ea nu se ridică pînă la limbaj formalizat, pînă la calcul logic nu datorită unei incapacități ce ar ține de natura ei, ci pentru că aceste unelte sînt inadecvate obiectului ei. Pentru logica de tradiție aristotelică rămîne un fapt definitoriu că, atît în investigare, cît și în expunerea teoriei logice, locul principal revine limbajului natural. În acest fel, logica de tradiție aristotelică își are problemele ei specifice și uneltele ei specifice. Ea ajunge la concluzii veritabile, sub aspectul valorii lor științifice și rămîne drept *logică formală neformalizată*.

Logica simbolică în schimb se bazează pe o extindere completă a procedeului formal, care, în cazul ei devine total. Aceasta îi permite să fundamenteze un calcul specific, asemănător calculului matematic, dar, totodată, deosebit de acesta prin semnificația și prin finalitatea sa. Utilizarea unui procedeu formal total, al cărui prim semn este un limbaj formalizat, conduce logica simbolică la o mărire a domeniului de studiu, atît în lărgime, cît și în adîncime, aspecte nu doar noi pentru logica de tradiție aristotelică, dar și imposibil de realizat pentru ea cu metodele care îi sînt specifice. Această lărgire și adîncire a investigației logice nu a putut avea drept rezultat anularea logicii de tradiție aristotelică, căci dacă metodele acesteia din

urmă nu sînt capabile să ne conducă la aceleași rezultate cu logica simbolică, apoi nici logica simbolică, oricît de profundă și de subtilă ar fi ea, nu reușește să atingă acele aspecte pe care le teoretizează logica de tradiție aristotelică. Logica simbolică studiază noi structuri logice și încercările unor logicieni de a utiliza metodele ei în studiul unor structuri logice specifice logicii de tradiție aristotelică, așa cum a făcut J. Lukasiewicz cu silogismul aristotelic, nu au avut drept rezultat anularea logicii de tradiție aristotelică, deși nu s-au încheiat fără rezultate pentru domeniul logicii simbolice. Logica simbolică, ca întregire a teoriei demonstrației, se distinge de logica de tradiție aristotelică, nu doar prin adaosul de probleme noi la fondul științei logicii, dar și prin aceea că ea nu este numai *logică formală*, ci este și *formalizată*. Dar natura obiectului lor, studiul principiilor care guvernează inferențele indiferent dacă una studiază o categorie de inferențe, iar cealaltă altele, unește și nu desparte cele două discipline logice — logica de tradiție aristotelică și logica simbolică — în știința logicii. Ca dimensiuni ale științei logicii unice, atît logica formală neformalizată, cît și logica formalizată, sînt chemate să răspundă unei categorii unice de probleme: calea prin care, pe baza unor propoziții poate fi determinată valoarea de adevăr a altor propoziții, mijlocul de a găsi unele propoziții noi, pornind de la altele, sau a găsi propozițiile din care decurg anumite propoziții date [16 p. 9]. Aceste căi, aceste mijloace pot fi diferite în funcție de natura propozițiilor, de domeniul căruia ele îi aparțin și de aici diversitatea tipurilor de inferență și chiar pluralitatea logicii. Pentru logică însă această diversitate își află un punct comun în analiza condițiilor de validitate ale acestor inferențe. Aici își află rațiunea știința logicii ca teorie a demonstrației, ca studiu al argumentării.

Această unitate de principiu a științei logicii nu exclude ci, dimpotrivă, presupune o veritabilă diversitate. Realizarea unitară a științei logicii ca finalitate cere studierea tuturor aspectelor posibile ale tuturor tipurilor de inferență. De aici rezultă nu numai diversitatea metodelor utilizate în investigare, dar și diversitatea sistemelor logice în funcție de domeniul concret de probleme căruia îi este dedicat fiecare dintre ele. Această diversitate de sisteme logice poate fi abordată din mai multe puncte de vedere. O primă distincție, pe care am remarcat-o încă în discuția de pînă acum, este cea dintre logica

de tradiție aristotelică și logica simbolică luată în ansamblul ei. Dar dacă ne vom opri atenția, chiar numai în trecere, asupra logicii simbolice, vom constata o veritabilă bogăție de „logici".

Cu scopul de a elimina pe cît posibil orice fel de ambiguități, atît în discuția de acum, cît și în cele ce urmează, adoptînd clasificarea lui R. J. Ackermann [1 p. 3—6] vom distinge mai întîi între o *logică* și *calculul asociat ei*. În acest fel, o *logică* va fi alcătuită ca o mulțime de procedee pentru soluționarea unei anumite categorii de probleme, cel puțin parțial prin intermediul interpretării și al manipulării unui *calcul formal asociat* acestei logici. O *logică* va depinde totdeauna de anumite tehnici intuitive, pe cînd un *calcul* va fi definit ca un sistem formalizat a cărui construcție poate fi făcută în întregime formal. În acest fel înțelese, calculele sînt neinterpretate, dar un calcul asociat cu o logică va fi totdeauna astfel construit ca el să poată primi cel puțin o interpretare folositoare pentru întrebuințarea logicii în soluționarea categoriei sale de probleme. În această perspectivă, prin expresia de *sistem logic* vom înțelege ansamblul format dintr-o logică și cel puțin un calcul asociat ei. În ceea ce privește noțiunea de calcul logic, ea se concretizează de cele mai multe ori printr-un sistem axiomatic, dar nu se exclude posibilitatea unui calcul de tipul deducției naturale [38 p. 74].

O altă distincție, pe care o facem în continuare, are drept criteriu numărul de valori de adevăr adoptat de o anumită logică și în consecință presupus de calculul asociat ei. În acest sens, vom distinge logica bivalentă de logica polivalentă în genere.

Analiza logicilor polivalente impune însă o nouă distincție. Astfel, putem constata, pe de o parte, sisteme logice polivalente care adoptă aceiași operatori ca și sistemul logicii bivalente. Mai precis, identitatea constă în aceea că, dacă din matricile ce definesc operatorii unui astfel de sistem logic polivalent eliminăm valorile de adevăr nou introduse în raport cu logica bivalentă, vom obține exact matricea aceluiași operator în cadrul sistemului bivalent. Un exemplu pentru un astfel de sistem logic polivalent este cel propus de J. Lukasiewicz și A. Tarski în 1920 [1 p. 37]. Cu totul alta va fi situația dacă vom considera unul din sistemele logice cunoscute și sub numele de sisteme de logică modală, propuse de C. I. Lewis. Fără a

trece cu vederea deosebirea ce se impune între sistemele modale și cele polivalente, urmărind criteriul mai sus adoptat, reamintim faptul că dacă oricare din calculele propuse de C. I. Lewis are o caracterizare axiomatică finită, nici unul din ele nu dispune de o caracterizare matricială finită, iar caracterizarea matricială a operatorilor adoptați diferă esențial de cea a acelorași operatori în sistemul logic bivalent.

În baza celor discutate, vom numi logica bivalentă ***logică standard***, iar logicile polivalente care adoptă, în maniera arătată, operatorii logicii standard, vor fi numite *logici polivalente* ***standard***. Orice logică, modală sau polivalentă, ai cărei operatori au o astfel de definiție matricială care nu poate fi redusă, prin eliminarea valorilor suplimentare, la matricile operatorilor din logica standard, va fi numită *logică non-standard*, modală sau polivalentă, după cum este cazul.

Revenind la logica standard, vom constata chiar în interiorul ei nivele diferite ale analizei logice. Un prim nivel este cel al logicii propozițiilor, căreia îi este asociat calculul propozițional, pe care noi îl vom numi în continuare *CP*. Al doilea nivel al logicii standard este constituit de logica predicatelor căreia i se asociază calculul funcțional, numit de noi în continuare *CF*. Evident, logica standard mai include și logica relațiilor (*LR*) și logica claselor (*LC*) cu calculele corespunzătoare asociate lor, dar la aceste ultime două nivele nu vom face decît puține referințe în cuprinsul acestei lucrări.

Înainte de a încheia acest prim paragraf al introducerii, socotim necesar a preciza că, în cuprinsul lui, nu am intenționat să dezvoltăm o analiză detaliată a problemelor majore aduse în discuție. Cînd spunem aceasta ne gîndim la chestiuni atît de delicate cum sînt cele referitoare la definiția logicii sau cele care privesc raporturile dintre logică și alte științe și în primul rînd dintre logică și matematică. Noi ne-am străduit în primul rînd să enunțăm, cît mai clar posibil, punctul nostru de vedere asupra chestiunilor discutate și aceasta numai în perspectiva celor ce urmează a fi dezvoltate în celelalte capitole ale lucrării. Tot în același sens, în finalul acestui paragraf, cu scopul de a ne feri, în primul rînd pe noi înșine, de posibilitatea unor exprimări neclare cînd ne vom referi la diferitele părți ale științei logicii, ne-am permis să adoptăm o anumită clasificare în cadrul universului atît de complex pe care îl

presupune logica contemporană. Evident, numele adoptate au doar semnificația unei convenții și nu încercăm să impunem clasificarea acceptată de noi ca definitivă.

2. PRINCIPIUL DUALITĂȚII ÎN GEOMETRIA PROIECTIVĂ

În una din lucrările prin care și-a înscris numele, alături de G. Boole, ca deschizător de drum în istoria modernă a logicii simbolice, Augustus De Morgan, într-o scurtă referință la principiul dualității, scria că acesta este mult mai familiar pentru matematicieni decît pentru logicieni [39 p. 126—127]. Cuvintele sale își păstrează și astăzi deplină valabilitate, mai ales dacă ne gîndim la domeniul logicii de tradiție aristotelică. Dacă în discuția noastră anterioară privind raportul dintre logica simbolică și logica de tradiție aristotelică am fi simțit nevoia de a concretiza afirmația că logica simbolică a adus noi probleme în cîmpul de studiu al științei logicii, atunci cu siguranță că problema dualității ar fi fost un exemplu destul de bun.

Într-adevăr, așa cum am mai afirmat, logicii simbolice îi revine meritul de a fi scos la lumină manifestările logice ale principiului dualității și, după cum arăta W. Quine, se pare că primul autor care a acordat atenție acestei chestiuni a fost E. Schröder în 1877. [44 p. 59].

Dar înainte de a fi studiat de către E. Schröder, principiul dualității a fost studiat în matematică, se pare, la început în geometria proiectivă și apoi în algebră, cu precădere în algebrele booleene. Dacă este adevărat că principiul dualității a ieșit la lumină pentru prima oară în cadrul geometriei proiective, tot atît de adevărat pare să fie că astăzi, o expunere a conținutului geometriei proiective este privită ca inseparabilă de principiul dualității. Prin urmare, dacă încercăm o referință la istoria descoperirii și cercetării principiului dualității, nu am putea ocoli această ramură a matematicii. Ne propunem deci, fără a intra însă în prea multe detalii tehnice, să încercăm să desprindem felul în care principiul dualității se manifestă în geometria proiectivă. Deși lucrarea intenționează să prezinte manifestările logice ale principiului dualității, considerăm această paranteză necesară și nu numai din dorința de a încerca să schițăm o istorie a studiului dualității, ci mai ales din aceea

de a cîștiga cîteva elemente pe baza cărora să putem discuta mai tîrziu despre manifestări diverse ale dualității.

Geometria plană, datorată în special primelor 6 cărți ale *Elementelor lui Euclid*, poate fi caracterizată ca o geometrie a dreptelor și a cercurilor. Uneltele ei de lucru sînt rigla și compasul. Geometria inițiată de Euclid corespunde într-o măsură destul de mare numelui originar de „geometrie" — măsurarea pămîntului — în sensul că pentru ea este caracteristic a măsura unghiurile și distanțele. De asemenea, un fapt fundamental pentru geometria plană este ideea paralelismului.

În sensul în care a fost descrisă geometria plană, calea spre geometria proiectivă a fost deschisă de geometrul danez Georg Mohr (1640—1697) și de geometrul italian Lorenzo Mascheroni (1750—1800), care au construit un sistem geometric din care au eliminat rigla [5 p. 208]. Deși pe calea unei proceduri destul de complicate, ei au arătat că, date fiind punctele A, B, C, D este posibil a construi punctul unde dreptele AB și CD se întîlnesc.

O primă caracteristică a geometriei proiective este aceea de a elimina compasul și de a păstra ca unealtă de lucru numai rigla. Acest fapt are drept consecințe eliminarea conceptelor de unghi, distanță și paralelism. Geometria proiectivă, ca geometrie a riglei, nu măsoară distanțele dintre puncte și nici unghiurile dintre drepte, în plus ea nu admite ideea ca două drepte să nu se întîlnească și astfel elimină ideea paralelismului. După cum susține H. S. M. Coxeter, unul din autorii pe care ne bazăm în elaborarea acestui paragraf, construcția deductivă a geometriei proiective întîlnește opera lui Euclid numai în spirit, dar nu și în detaliu [14 p. 1].

Dintre ideile fundamentale ale geometriei proiective, urmînd cele spuse de H. S. M. Coxeter [14] și H. G. Forder [18], reamintim pe cele de „punct", „dreaptă", „colinearitate" și „concurență". În mod firesc, *punctul* este gîndit ca o „poziție fără mărime", sau ca un „loc infinitesimal" reprezentat într-o diagramă printr-un punct material (grafic). Prin *dreaptă* se înțelege o linie dreaptă de o întindere nelimitată. Orice număr de puncte ce stau pe o dreaptă sînt numite *colineare*. Orice număr de drepte ce trec printr-un punct sînt numite *concurente*. Orice număr de puncte și drepte așezate în același plan sînt numite *coplane*. Pornind de la aceste concepte de bază și presu-

punînd că două drepte coplane se întîlnesc totdeauna, se obține un sistem de propoziții care este tot atît de consistent, din punct de vedere logic, ca și sistemul lui Euclid. [14 p. 1].

Evident, o tratare axiomatică a geometriei proiective, așa cum o prezintă printre alții A. Heyting [23], sau R. L. Goodstein și E. J. F. Primrose [19], implică, în plus, o serie de concepte logice, începînd cu cele obișnuite de *axiomă, teoremă, deducție* și continuînd cu cele de *conjuncție a două teoreme, disjuncție a două teoreme, implicație, negație* etc. [18 p. 56]. La fel, înțelegînd dreapta ca o clasă de puncte și punctul ca un element al acestei clase, tratarea strict deductivă a geometriei proiective implică și alte concepte logice de la nivelul logicii claselor și cel al logicii relațiilor și aceasta chiar dacă pentru construcția formală a geometriei proiective se utilizează un model algebric, așa cum propune A. Heyting în lucrarea mai sus citată.

După cum am mai arătat, nu intenționăm să prezentăm în detaliu conținutul geometriei proiective și nici problema fundamentelor ei logice. Dorim doar să desprindem, pe scurt, felul în care geometria proiectivă presupune în construcția ei principiul dualității. Preluînd informațiile de ordin istoric oferite de H. S. M. Coxeter, geometrul francez Poncelet susține acest principiu ca propria sa descoperire, dar natura sa a fost mai clar înțeleasă de către J. D. Gergonne (1771—1859) [14 p. 4].

Referindu-se la legătura dintre acest principiu și geometria proiectivă, E. A. Maxwell spunea că cititorul unei cărți de geometrie proiectivă trebuie să se familiarizeze, cît mai devreme posibil, cu ideea de dualitate și cu folosirea dreptelor coordonate [36 p. 11]. Urmînd indicațiile aceluiași autor, putem afirma că ideea de dualitate din geometria proiectivă este bazată pe similaritatea dintre proprietățile punctelor în legătură cu dreptele și ale dreptelor în legătură cu punctele. În acest sens se poate spune că principiul dualității este legat de conceptele de bază ale geometriei proiective și în consecință, pentru un astfel de tratat, enunțarea lui se impune de la început. Astfel, R. L. Goodstein și E. J. F. Primrose, enunțînd postulatele de la care ei pornesc la construcția axiomatică a geometriei proiective:

(A_1) = În orice teoremă sau demonstrație putem introduce cît de multe puncte și drepte, cîte dorim;

(A_2) = Există una și numai o singură dreaptă care stă pe două puncte date;

(A_3) = Există un punct și numai unul care stă pe două drepte date;

arată că *principiul dualității* constă aici din aceea că înlocuind în convențiile (A_1), (A_2) și (A_3) termenul „punct" prin termenul „dreaptă" și termenul „dreaptă" prin termenul „punct", enunțurile sînt, ca întreg, nealterate; numai ordinea enunțurilor este schimbată* [19 p. 2]. Deși se poate observa că există anumite modificări în ceea ce privește modalitatea de enunțare a postulatelor geometriei proiective de către autori diferiți și deci în felul de a pune în evidență existența principiului dualității — de exemplu E. A. Maxwell dă următoarea pereche de enunțuri: (1) Două puncte determină o dreaptă; (2) Două drepte determină un punct; — ceea ce este esențial pentru principiul dualității rămîne nealterat.

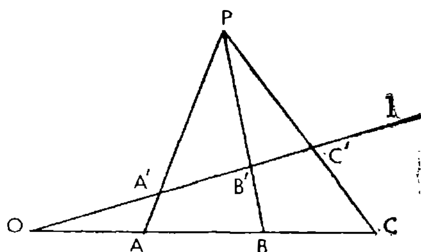
Dacă ne referim nu numai la simpla sa existență, așa cum ea a fost indicată imediat mai sus, ci și la folosirea principiului dualității în contextul geometriei proiective, atunci în conformitate cu R. L. Goodstein și E. J. F. Primrose, putem spune că, din orice propoziție și demonstrația sa, geometrul poate obține o altă propoziție demonstrată, în mod simplu, numai prin operarea schimbărilor cerute de principiul dualității. În cadrul geometriei proiective, un singur argument este suficient pentru a demonstra două propoziții și aceasta este posibil în virtutea a ceea ce se numește principiul dualității [19 p. 2].

Cu scopul de a oferi o serie de exemple privind folosirea principiului dualității în geometria proiectivă, am ales, după H. G. Forder [18], realizarea unei proiecții. Astfel, presupunem că *O*, *A*, *B* și *C* sînt puncte colineare și că *l* este o dreaptă prin *O*, distinctă de dreapta *OA*. Dacă *P* este un punct situat în afara oricăreia din dreptele date și dacă dreptele *PA*, *PB*, *PC*, întîlnesc dreapta *l* în punctele *A'*, *B'* și *C'*, atunci spunem că șirul punctelor *A*, *B*, *C* este perspectiva și-

* Menționăm că enunțurile (A_2) și (A_3) pot primi o traducere pur logică (16 a p. 214—215). Reținem această eventualitate atît pentru legătura dintre conceptul matematic și cel logic de dualitate, cît și în vederea distrucției dintre *termeni duali* — în matematică și *operatori duali* — în logică.

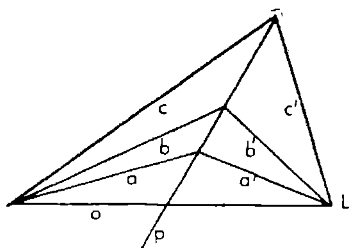
rului A', B', C'. Figura (1) reprezintă grafic cele spuse mai sus. Dualul construcției din figura (1) este redat prin figura (2), după cum urmează:

Figura 1.



În mod dual se presupune că *o*, *a*, *b* și *c* sînt drepte concurente și *L* este un punct pe dreapta *o*, dar distinct față de dreapta *oa*. Dacă *p* este o dreaptă ce nu trece prin nici unul din punctele date și dacă punctele *p.a*, *p.b* și *p.c* atunci cînd sînt unite cu punctul *L* dau dreptele a', b' și c', spunem că fascicolul dreptelor *a*, *b* și *c* este perspectivă a fascicolului a', b' și c'. Implicarea principiului dualității aici poate fi remarcată cu ușurință. Astfel, dacă pornim de la construcția grafică din figura (1), pe baza principiului dualității, așa cum a fost enunțat anterior, putem deriva construcția grafică din figura (2).

Figura 2.



Pentru aceasta este suficient ca în descrierea construcției grafice din figura (1) să schimbăm termenii „dreaptă" cu „punct" și „punct" cu „dreaptă" și să operăm, evident, toate celelalte schimbări care derivă de aici, ca de exemplu schimbarea dintre termenii „șir" și „fascicol". Este evident că în același fel am putea obține descrierea figurii (1) pornind de la figura (2).

Expunerea geometriei proiective conține o mulțime de enunțuri duale, care, după cum propune H. S. M. Coxeter, pot fi ordonate în coloane paralele. Iată un exemplu:

Dacă patru *puncte* dintr-un plan sînt *unite* prin șase *drepte* distincte, ele sînt numite *vîrfurile* unui *patrulater* complet, iar *dreptele* considerate se spune a fi cele șase *laturi* ale sale.
Două *laturi* se spune a fi opuse, dacă punctul lor comun nu este unul din *vîrfurile* patrulaterului. Punctul comun pentru două *laturi* opuse este numit *punct diagonal*. Există trei puncte diagonale. În figura (3) *patrulaterul* este *PQRS*, *laturile* sale sînt:
PS, *QS*, *RS*,
QR, *RP*, *PQ*,
iar *punctele* sale diagonale sînt: *A*, *B* și *C*

Dacă patru *drepte* dintr-un plan *se întîlnesc* perechi în șase *puncte* distincte, ele sînt numite *laturile* unei *figuri geometrice cu patru unghiuri* complete, iar *punctele* considerate sînt cele șase *vîrfuri* ale sale.
Două *vîrfuri* se spune a fi opuse dacă întîlnirea lor nu este o *latură*. Unirea a două *vîrfuri* opuse este numită *dreaptă diagonală*.
Există trei drepte diagonale. În figura (3), *figura geometrică cu patru unghiuri* este *pqrs*, *vîrfurile* sale sînt:
p.s, *q.s*, *r.s*,
q.r, *r.p.*, , *p.q*
iar *dreptele* sale diagonale sînt: *a*, *b* și *c*

Cele două diagrame din figura (3) concretizează aceste enunțuri:

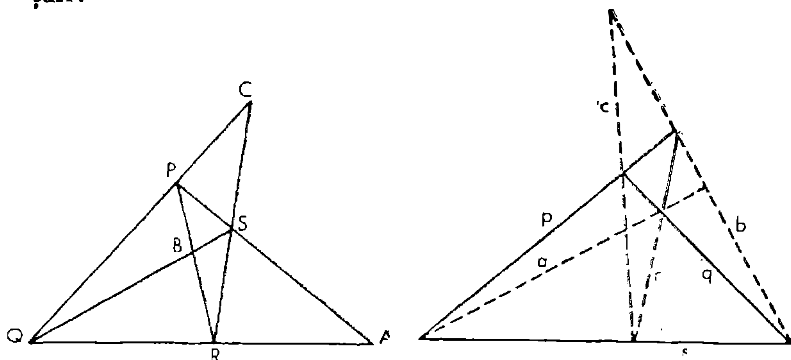


Figura 3.

În mod cu totul analog exemplului anterior putem spune că diagramele cuprinse de figura (3) sînt duale, iar derivabilitatea lor reciprocă se poate realiza dacă luăm în considerație schimbarea termenilor subliniați în cadrul enunțurilor (duale la rîndul lor) care descriu aceste diagrame.

În cadrul geometriei proiective, principiul dualității își manifestă de asemenea prezența și utilitatea la nivelul teoremelor astfel încît, fiecărei teoreme îi corespunde o teoremă duală. Întrucît însă, această chestiune este o urmare firească a axiomelor geometriei proiective, fapt care a putut fi remarcat atunci cînd am reprodus postulatele asumate de R. L. Goodstein și E. J. F. Primrose și dat fiind contextul în care se înscrie lucrarea noastră, socotim a nu fi necesar să oferim și alte exemple.

Înainte însă de a încheia acest ultim paragraf al introducerii, este important în perspectiva dezvoltării ulterioare a lucrării să remarcăm un caz special de manifestare a principiului dualității în geometria proiectivă. Este vorba de așa-numiții „autoduali". Astfel, în cazul geometriei proiective plane exemplul de autodual cel mai des citat este cel al triunghiului.

Trebuie semnalat totodată că principiul dualității își conservă toate calitățile și dacă se trece de la geometria proiectivă plană la geometria proiectivă în spațiu, cu singura modificare că, așa cum arată H. G. Forder, în spațiul proiectiv de trei dimensiuni *punctul* și *planul* sînt elemente duale, iar *dreapta* este propriul său dual. În consecință, dacă în orice teoremă adevărată sau demonstrație validă, schimbăm între ei termenii *punct* și *plan* și operăm toate celelalte schimbări ce urmează din aceasta — ca de exemplu schimbăm propoziția „punctele stau pe o dreaptă" cu propoziția „planurile trec printr-o dreaptă" — atunci teorema astfel obținută este adevărată, iar demonstrația corespunzătoare ei este validă [18 p. 79].

Așa cum arătam chiar la începutul acestui paragraf, pe care, într-un anume sens, l-am socotit doar o paranteză în contextul lucrării noastre, ne-am oprit asupra principiului dualității în geometria proiectivă numai în sensul că aici, principiul dualității a fost probabil pentru prima dată studiat și aplicat în construcția unei teorii formalizate.

În ceea ce privește un eventual cîștig pentru dezvoltarea ulterioară a lucrării, considerăm pentru moment semnificativ să remarcăm cîteva idei ce ni se par implicate în conținutul

acestui paragraf. Prima observație ar fi aceea că principiul dualității poate fi sesizat, de obicei, prin compararea a două enunțuri astfel alcătuite încît cel de al doilea poate fi obținut din primul pe baza anumitor schimbări. Trecerea de la unul din aceste enunțuri la celălalt, în baza principiului dualității se realizează efectiv într-o relație de simetrie între cele două enunțuri. În al doilea rînd, ca un caz special de manifestare a principiului dualității, am constatat că în unele cazuri, dualul unui element nu este distinct față de acest element și în acest caz, nu vorbim de două entități aflate în raport de dualitate, ci de auto-duali. Această situație particulară o vom regăsi și la nivelul logicii formale. În al treilea rînd, analiza principiului dualității în geometria proiectivă ne-a permis să desprindem și posibilitatea unei dimensiuni operaționale a principiului dualității. Această posibilitate, manifestată sub două aspecte, deschide o perspectivă spre o utilizare, probabil chiar practic-nemijlocită, a studiului principiului dualității. Primul aspect ține de faptul că, dată fiind o teoremă a geometriei proiective, cu ajutorul principiului dualității, poate fi derivată în mod simplu o nouă teoremă, validă și ea dacă prima a fost validă. Al doilea aspect al acestei dimensiuni operaționale constă în aceea că, dacă a fost efectuată demonstrația uneia din cele două teoreme și dacă s-a dovedit că această demonstrație este validă, atunci tot principiul dualității ne ajută să construim în mod simplu și demonstrația validă a celeilalte teoreme. Fără îndoială că o astfel de perspectivă sugerată de prezentarea principiului dualității în geometria proiectivă prezintă destul interes în cadrul teoriei logice pentru ca să revenim asupra ei în capitolele următoare.

Credem că cele prezentate pînă acum cu privire la existența principiului dualității în geometria proiectivă sînt suficiente în contextul lucrării. În raport cu cele de mai sus, conținutul acestui paragraf ne permite să conchidem că studiul principiului dualității are o istorie mai îndelungată decît aceea pe care i-o consemnează istoria logicii. Pe de altă parte, faptul că ne-am oprit asupra unor aspecte ale principiului dualității numai în geometria proiectivă, e adevărat într-o manieră destul de sumară, nu vrea să însemne că în afara logicii acesta ar fi singurul domeniu în care acest principiu își manifestă prezența. Implicarea lui în matematică și, pe baza unor autori [9], [17], [52] se pare că nu numai acolo, este mult mai adîncă.

Fără îndoială că el este cunoscut, în primul rînd, ca un principiu al algebrei booleene, așa cum noi am putut constata din consultarea unor lucrări, cum ar fi cele datorate lui F. E. Whitesitt [53] sau lui P. R. Halmos [22], dar dacă luăm în considerație lucrări ca cele datorate lui A. Heyting [23] și Leinhold Baer [3], am putea constata că aplicațiile principiului dualității au o mult mai mare extensiune în algebră. Dar dacă principiul dualității are o atît de largă arie de manifestare în matematică, este firesc, așa cum spunea Augustus De Morgan. ca el să fie familiar matematicienilor. În cele ce urmează însă vom încerca să desprindem cîteva aspecte privind logica principiului dualității.

I

DUALITATEA ÎN LOGICA STANDARD

Locul în care au fost descoperite și studiate manifestările logice ale principiului dualității, așa cum confirmă majoritatea autorilor, este logica standard. După cum am convenit încă din primul paragraf al introducerii, o caracteristică definitorie a logicii standard este aceea că, la acest nivel, teoria logică se fundamentează pe recunoașterea a numai două valori de adevăr — valoarea de adevăr *adevăr* (denotată în cele ce urmează de cifra „1") și valoarea de adevăr *fals* (denotată în continuare prin cifra „0").

1. CHESTIUNI PRELIMINARE

După cum arată R. J. Ackermann, introducerea unor valori de adevăr suplimentare și în consecință construirea logicilor polivalente a pornit de la respingerea de către unii logicieni a criteriului validității acreditat de logica standard, în sensul că acest criteriu ar fi prea larg și ca atare insuficient de riguros [1 p. 69]. Deși nu totdeauna construirea unei logici polivalente are ca punct de plecare expres tocmai chestiunea discutată, fără îndoială că existența unei veritabile multiplicități de sisteme logice polivalente consistente, standard sau non-standard, dovedește că logica standard nu reprezintă decît un fragment din ceea ce se poate înțelege astăzi prin termenul de logică simbolică.

În ceea ce privește analiza principiului dualității pe care o intenționăm în cele ce urmează, ne vom limita atenția, în cea mai mare parte, la logica standard. Evident, nu vom exclude

referințe la logicile polivalente standard sau non-standard, dar socotind că alcătuirea acestor din urmă sisteme, chiar dacă exclude posibilitatea unor prea mari apropieri, presupune o permanentă comparație cu logica standard, credem că analiza dualității în cadrul bivalenței ne va permite desprinderea unor aspecte fundamentale ale acestui tip de relație. În plus, în cadrul logicii standard, vom da prioritate logicii propozițiilor și calculului asociat ei.

Prin urmare, limitînd numărul valorilor de adevăr ce pot fi desemnate de către variabilele propoziționale la numai două, 1 și 0, vom putea distinge, în cadrul *CP*, 16 funcții de adevăr bi-membre. Astfel, dacă scriem „$(v_1, v_2, v_3, v_4)pq$" pentru o funcție de adevăr al cărei operator conectează variabilele propoziționale p și q, v_1 fiind valoarea acestei funcții cînd $p = 1$ și $q = 1$, v_2 — valoarea funcției cînd $p = 1$ și $q = 0$, v_3 — valoarea funcției cînd $p = 0$ și $q = 1$, iar v_4 — valoarea aceleiași funcții pentru cazul în care $p = 0$ și $q = 0$, vor fi posibile următoarele funcții de adevăr:

(1) $(1, 1, 1, 1)pq = Vpq$
(2) $(1, 1, 1, 0)pq = Apq$
(3) $(1, 1, 0, 1)pq = Bpq$
(4) $(1, 0, 1, 1)pq = Cpq$
(5) $(0, 1, 1, 1)pq = Dpq$
(6) $(1, 0, 0, 1)pq = Epq$
(7) $(0, 0, 1, 1)pq = Fpq$
(8) $(0, 1, 0, 1)pq = Gpq$
(9) $(1, 0, 1, 0)pq = Hpq$
(10) $(1, 1, 0, 0)pq = Ipq$
(11) $(0, 1, 1, 0)pq = Jpq$
(12) $(1, 0, 0, 0)pq = Kpq$
(13) $(0, 1, 0, 0)pq = Lpq$
(14) $(0, 0, 1, 0)pq = Mpq$
(15) $(0, 0, 0, 1)pq = Xpq$
(16) $(0, 0, 0, 0)pq = Opq$

Tabelul 1

Dacă în cadrul tabelului nr. 1 tragem o linie între rîndurile (8) și (9), astfel încît obținem două părți egale, prin numărul de funcții de adevăr cuprinse în fiecare în parte, vom putea remarca cu ușurință că, fiecărui operator din prima jumătate

a tabelului — de la numărul (1) la (8) inclusiv — îi corespunde în cea de a doua jumătate — de la numărul (9) la (16) inclusiv — într-o poziție simetrică, un alt operator, un fel de complementar al primului. Astfel, fiecărei valori de adevăr 1 la funcția de adevăr din prima jumătate îi corespunde valoarea de adevăr 0 la funcția de adevăr din cea de a doua jumătate a tabelului nr. 1 și vice-versa. De aici rezultă existența unui al 17-lea operator, *negația*, definită după cum urmează:

$$N1 = 0$$
$$N0 = 1$$

adică, negația unui enunț adevărat este falsă, iar negația unui enunț fals este adevărată.

Într-o caracterizare destul de largă, cel puțin două aspecte deosebesc negația de ceilalți 16 operatori ai *CP*. Astfel, dacă oricare dintre cei 16 operatori menționați explicit în tabelul nr. 1 presupunea, pentru construirea unei funcții de adevăr, sau mai bine zis, pentru a alcătui o *formulă bine formată* (fbf), două elemente, în cazul nostru două variabile proporționale, negația cere, în același scop, un singur element. Din acest punct de vedere, fiecare din cei 16 operatori ai CP exprimați în mod direct prin tabelul de mai sus, poate fi definit ca un *operator binar*. În schimb, așa după cum rezultă din cele spuse, negația este un *operator monar*. Al doilea, operatorul negație nu apare exprimat direct în tabelul nr. 1, așa cum este cazul oricăruia din ceilalți 16 operatori. Explicația celei de a doua particularități a negației ține de prima și anume, tabelul nr. 1, prin modalitatea sa de alcătuire, fiind expresie a operatorilor binari ai *CP*, nu poate oferi în mod direct un operator monar, așa cum este negația. Operatorul negație este implicat în tabelul nr. 1 ca operator al *CP*, dar definiția sa devine explicită printr-o operație de comparație între funcțiile de adevăr ce își află manifestarea directă în cadrul tabelului considerat. În aceste două puncte de deosebire ale negației față de ceilalți operatori ai *CP*, vom găsi două puncte de asemănare între negație și dualitate.

În cele ce urmează, prin termenul *dualitate* vom înțelege, pe de o parte, o relație — în sensul în care ea a fost definită în introducere, dar pe de altă parte, vom înțelege și o operație logică. Vom spune că avem o relație în sensul unui raport existent, dat, între două funcții logice, pe care le vom numi

duale. Vom spune că avem o operaţie atunci cînd, folosind definiţia relaţiei de dualitate, vom pleca de la o funcţie de adevăr dată şi vom construi o nouă funcţie de adevăr, duala celei dintîi. Pentru acest al doilea înţeles socotim că este preferabil ca în locul numelui ***dualitate*** să folosim numele ***dualizare***.

Dar înainte de a prezenta alte detalii privind modul în care noi înţelegem şi explicăm dualitatea, din punctul de vedere al teoriei logice, se impune a ne opri asupra felului în care principiul dualităţii a fost înţeles şi prezentat de diferiţi logicieni.

2. DOUĂ DEFINIŢII ALE DUALITĂŢII

După cum afirmam chiar la începutul lucrării, nu toţi logicienii contemporani au acordat atenţie principiului dualităţii în cadrul cercetărilor lor. Cu toate acestea, pot fi remarcate cel puţin două moduri oarecum diferite de a înţelege şi deci de a defini dualitatea.

Un prim fel de a defini dualitatea îl întîlnim în lucrările lui Willard van Orman Quine [44] şi [45]. Urmînd spusele sale, putem afirma că autorul citat leagă ideea de dualitate de complementaritatea existentă între cele două valori de adevăr admise de logica standard [44 p. 59—63]. Într-adevăr, el defineşte două scheme logice drept *duale*, atunci cînd definiţia matricială a celei de a doua a fost obţinută din definiţia matricială a primei scheme, prin schimbarea în cadrul acesteia a oricărei apariţii a valorii de adevăr 1 cu valoarea de adevăr 0 şi punînd pentru orice apariţie a valorii de adevăr *O* valoarea de adevăr 1. În acest fel, dacă pornim de la definiţia matricială a conjuncţiei, exprimată prin matricea (M 12.1) şi operăm toate schimbările cerute, vom obţine definiţia matricială a disjuncţiei neexclusive (pe care în continuare o vom numi simplu „*disjuncţie*"), redată de matricea (M 12.2). De aici se poate considera că cele două funcţii de adevăr, conjuncţia şi disjuncţia, sînt funcţii duale.

p q	*Kpq*
1 1	1
1 0	0
0 1	0
0 0	0

(M.12.1)

pq	*Apq*
00	0
01	1
10	1
11	1

(M.12.2)

Aplicînd acelaşi procedeu în cazul fiecărui operator al *CP* înscris, în mod explicit, în tabelul nr. 1, vom putea determina fiecare pereche de operatori duali ai *CP*, aşa cum rezultă din tabelul nr. 2, în care operatorii duali sînt aşezaţi pe acelaşi rînd:

(1)	$(1, 1, 1, 1)pq = Vpq$	...	(16)	$(0, 0, 0, 0)pq = Opq$
(2)	$(1, 1, 1, 0)pq = Apq$	...	(12)	$(1, 0, 0, 0)pq = Kpq$
(3)	$(1, 1, 0, 1)pq = Bpq$	...	(13)	$(0, 1, 0, 0)pq = Lpq$
(4)	$(1, 0, 1, 1)pq = Cpq$	...	(14)	$(0, 0, 1, 0)pq = Mpq$
(5)	$(0, 1, 1, 1)pq = Dpq$	...	(15)	$(0, 0, 0, 1)pq = Xpq$
(6)	$(1, 0, 0, 1)pq = Epq$	...	(11)	$(0, 1, 1, 0)pq = Jpq$
(7)	$(0, 0, 1, 1)pq = Fpq$	...	(7)	$(0, 0, 1, 1)pq = Fpq$
(8)	$(0, 1, 0, 1)pq = Gpq$	...	(8)	$(0, 1, 0, 1)pq = Gpq$
(9)	$(1, 0, 1, 0)pq = Hpq$	...	(9)	$(1, 0, 1, 0)pq = Hpq$
(10)	$(1, 1, 0, 0)pq = Ipq$	...	(10)	$(1, 1, 0, 0)pq = Ipq$

Tabelul 2

Trebuie menţionat că, spre deosebire de alţi autori care acceptă aceeaşi definiţie a dualităţii, W. Quine nu indică perechile de operatori duali ai *CP*, după modelul tabelului nr. 2, deşi construcţia tabelului este implicată în definiţia pe care el a dat-o dualităţii.*

Folosindu-se de exemplul relaţiei de dualitate dintre conjuncţie şi disjuncţie, W. Quine, în continuarea analizei pe care o întreprinde asupra principiului dualităţii şi a implicaţiilor sale pentru *CP* şi *CF*, propune ca orice funcţie de adevăr alcătuită prin intermediul altor operatori binari decît conjuncţia şi disjuncţia să fie tradusă în termenii conjuncţiei şi negaţiei sau în cei ai disjuncţiei şi negaţiei. În consecinţă, la W. Quine discuţia despre dualitate are loc în înţelesul de dualitate între conjuncţie şi disjuncţie. Tocmai pe această bază W. Quine enunţă prima lege a dualităţii în sensul că, dată fiind o schemă oarecare *S*, care nu conţine nici o apariţie a altui operator binar în afară de conjuncţie sau disjuncţie, rezultatul schimbării

* Menţionăm în acest sens că M. Tîrnoveanu indică un astfel de tabel al operatorilor duali şi în continuare reduce operaţia de dualizare la numai schimbarea reciprocă a operatorilor duali [51 p. 304].

dintre conjuncție și disjuncție și invers, va fi o nouă schemă *S'*, care este dualul schemei *S*.

Ca o consecință firească a definiției dualității pe care a acceptat-o, W. Quine distinge cazul unor expresii auto-duale. Printre exemplele de scheme auto-duale pe care le oferă, W. Quine citează cazul formulelor „*Np*" și „*p*". Cel puțin primul exemplu sprijină afirmația noastră anterioară după care definiția dată de W. Quine dualității implică existența perechilor de operatori duali și deci faptul că analiza principiului dualității în cadrul *CP* poate ocoli reducerea la numai acele scheme logice care cuprind doar apariții ale conjuncției și a disjuncției; oricum, trebuie acceptat în „*N*" un operator al *CP*, altul decît conjuncția sau disjuncția. Evident, aceasta nu înseamnă prea mult, căci este firesc ca o schemă alcătuită cu ajutorul conjuncției și disjuncției să cuprindă și apariții ale negației, mai ales atunci cînd schema considerată este traducerea în limbajul conjuncției sau disjuncției a unei alte scheme alcătuită cu ajutorul oricărui alt operator al *CP*. Noi ne-am referit la această chestiune doar pentru a remarca posibilitatea unei generalizări în analiza principiului dualității în logica standard, posibilitate cuprinsă în definiția lui W. Quine, dar neluată în considerație de acesta, dat fiind faptul că în lucrarea citată el se ocupă de ideea de dualitate în legătură cu un sistem logic fundamentat pe conjuncție, disjuncție și negație.

De fapt, tocmai acest lucru este, într-un anume fel, susținut și de W. Quine atunci cînd enunță cea de a doua lege a dualității, prin care el indică de fapt un alt procedeu de a obține dualul unei scheme date, fără a presupune o eliminare preliminară a implicației, echivalenței sau a oricărui alt operator binar al *CP*. Enunțul acestui nou procedeu de obținere a dualului unei scheme date constă în aceea că oricare ar fi schema *S* considerată, dacă negăm fiecare variabilă propozițională ce intră în alcătuirea schemei *S*, cît și schema *S* în întregul ei, obținem o nouă schemă *S'* care este dualul schemei *S*. Această a doua lege a dualității este în mod evident legată de definiția dată inițial dualității și o consecință imediată a ei este faptul că dezvăluie în cunoscutele legi ale lui Augustus De Morgan exemple evidente de manifestare a principiului dualității. Acest fapt devine, evident dacă amintim că prima lege a dualității indică de fapt un procedeu de obținere a schemei duale. dată fiind o schemă oarecare. Cea de a doua lege indică un alt

procedeu dedicat aceluiași scop. Prin urmare, rezultatul paralel al celor două procedee nu ar fi doi duali, în adevăratul sens al cuvîntului, ci două forme de expresie a aceluiași dual.

În mod consecvent, definiția dată inițial impune cea de a treia lege a dualității enunțată de W. Quine, și anume, că dacă schema S este o schemă validă, atunci dualul ei va fi o schemă inconsistentă.

În sfîrșit, W. Quine finalizează expunerea proprietăților formale ale dualității enunțînd ultimele două legi. Prima dintre acestea, numită de el cea de a patra lege a dualității și cunoscută și sub numele de *principiul dualității pentru implicație* [12 p. 108], arată că dacă o schemă S_1 implică o altă schemă S_2, atunci dualul schemei S_2, fie el S_2 , implică dualul schemei S_1, adică S_1' . Ultima lege, adică cea de a cincea lege a dualității dată de W. Quine, numită și *principiul dualității pentru echivalență*, constă în aceea că două scheme S_1 și S_2 sînt echivalente, dacă și numai dacă dualele lor sînt echivalente.

Enunțarea celor cinci legi ale dualității îi permite lui W. Quine, în finalul paragrafului prezentat de noi aici, să indice o serie de exemple concrete de aplicare a principiului dualității, aplicații în cadrul cărora un rol preponderent revine ultimelor două legi. Aceste exemple se referă atît la formele normale, cît și la posibilitatea de a obține, în mod simplu, cu ajutorul principiului dualității, noi legi logice din altele deja demonstrate. Analiza pe care a făcut-o principiului dualității îi permite totodată lui W. Quine să ofere și o indicație privind extinderea aplicațiilor acestui principiu și dincolo de granițele științei logicii. Această indicație devine fapt atunci cînd, pe baza legilor dualității enunțate, W. Quine ne oferă un mijloc de a pune în evidență deosebirea dintre operatorii logici conjuncție și disjuncție, pe de o parte, și operatorii matematici înmulțire și adunare, pe de altă parte. Evident, el are în vedere aici o aritmetică în bază de numărare zece. Întrucît însă, pe noi ne-a interesat aici, în primul rînd, desprinderea modului în care W. Quine a definit dualitatea și proprietățile dualității care derivă din definiția acceptată, nu socotim necesar să insistăm acum asupra detaliilor tehnice pe care le presupun exemplele oferite de el. Pentru etapa la care am ajuns, e mai important să precizăm dacă putem constata, la alți autori contemporani, o alterare a definiției dată de W.

Quine dualității, sau dacă există chiar un alt mod de a concepe principiul dualității.

Tocmai un astfel de exemplu ni-l oferă I. Copi [13 p. 293—297]. Urmînd cele expuse de I. Copi, în capitolul pe care, în cadrul lucrării citate, îl dedică dualității, fără îndoială că primul lucru pe care ar trebui să-l facem este să încercăm să desprindem conținutul definiției dată de el dualității. Pentru aceasta cea mai bună cale este să redăm, pe cît posibil, chiar cuvintele autorului.

Astfel, I. Copi afirmă că dacă P_1, P_2, ..., P_n sînt variabile propoziționale sau n-litere predicat însoțite de n-variabile individuale x_1, x_2, ..., x_k și dacă S este o formulă bine formată alcătuită din P_1, P_2, ..., P_k, disjuncție, negație, conjuncție, cuantor universal, cuantor existențial, ( ), x_1, x_2, ..., x_k, atunci dualul lui S este rezultatul următoarelor schimbări:

(1) înlocuirea oricărei apariții a lui P_i (altele decît acele părți bine formate de tipul NP_i) în S prin NP_i;
(2) înlocuirea oricărei apariții a lui NP_i în S prin P_i;
(3) înlocuirea oricărei apariții a lui $(\forall x)$ în S prin $(\exists x)$;
(4) înlocuirea oricărei apariții a lui $(\exists x)$ în S prin $(\forall x)$;
(5) înlocuirea oricărei apariții a conjuncției în S prin disjuncție;
(6) înlocuirea oricărei apariții a disjuncției în S prin conjuncție.

Deși puțin mai complicată, cel puțin ca formă de exprimare, decît definiția acceptată de W. Quine, definiția dată de I. Copi dualității, are, de la prima vedere, avantajul de a acoperi atît nivelul *CP*, cît și cel al *CF*. Pe baza definiției sale, W. Quine rezolvă mai întîi doar problema dualității în cadrul *CP* și de abia apoi reformulează, e adevărat, pe o cale de loc complicată, definiția inițială, pentru a o adecva conținutului *CF* [44 p. 107].

Dar deosebirea dintre cele două definiții nu constă numai în cele arătate de noi pînă acum. De fapt, după opinia noastră, cele două definiții diferă în mod esențial. Această diferență dintre cele două definiții date dualității, sau mai bine spus, incompatibilitatea lor, poate fi pusă în evidență destul de ușor, dacă citām și exemplele pe care I. Copi le oferă cu scopul de a ilustra cerințele impuse de definiția sa. Astfel, după I. Copi,

dubla negație își află dualul în negație sau, mai precis, dualul lui NNP_i este NP_i. În mod firesc, consecvent conținutului definiției sale, al doilea exemplu al lui J. Copi este cu mult mai edificator, căci el ne spune că dualul negației este afirmația sau că dualul lui NP_i este chiar P_i. Reamintim faptul că, în conformitate cu definiția lui W. Quine, dualul lui NP_i este tot NP_i, negația fiind unul din cazurile de operatori autoduali.

Este important de menționat că la I. Copi identificarea dintre dualul unei formule și negația sa nu este numai rodul unui exemplu particular sau al unui caz-excepție, ci un fapt consemnat și de ceea ce I. Copi numește *Teorema Dualității* (DuT), care ar putea fi exprimată prin formula:

(12.1) $NS \equiv \triangleright S$*

în care prin „NS" înțelegem negația lui S, iar prin $\triangleright S$ înțelegem dualul lui S.

Considerăm că lista exemplelor oferite de I. Copi poate fi încheiată aici, întrucît oricare din următoarele ilustrări n-ar face altceva decît să manifeste într-o formă puțin diferită aceeași idee a echivalenței dintre dualitate și negație. Remarcăm însă un fapt interesant pe care îl prezintă unele dintre aceste exemple. Este vorba de un fel de distributivitate a operației de dualizare în raport cu conjuncția sau disjuncția. Nu este vorba de o distributivitate în sensul propriu al cuvîntului întrucît aceste exemple ne spun doar că aplicarea operației de dualizare asupra unei disjuncții ca întreg este echivalentă cu aplicarea operației de dualizare asupra fiecărui membru al unei conjuncții; evident, conjuncția are aceiași membri cu disjuncția inițială — formula (12.2). Același lucru se poate realiza și dacă formula inițială este o conjuncție, dar în acest caz cea de a doua expresie va fi o disjuncție — formula (12.3).

(12.2) $\triangleright ASR \equiv K \triangleright S \triangleright R$
(12.3) $\triangleright KSR \equiv A \triangleright S \triangleright R$

Trebuie însă menționat că ambele formule — (12.2) și (12.3) — nu reprezintă întrutotul o noutate, în sensul că n-ar putea fi obținute decît în baza definiției adoptată de I. Copi. Mai

* Dintre toți operatorii binari ai *CP*, numai echivalența va fi notată după modelul clasic al scrierii cu paranteze.

precis, ambele formule își păstrează valabilitatea chiar dacă se pornește în interpretarea lor de la definiția dată de W. Quine, dar numai dacă *S* și *R* sînt variabile propoziționale individuale, sau formule auto-duale, sau dacă *S* și *R* se află în raport de dualitate una față de cealaltă. Formulele (12.2) și (12.3) nu sînt însă valide căci, pe baza definiției dată de W. Quine, ele nu sînt adevărate pentru orice interpretare dată lui *S* și *R*. Să luăm ca exemplu formula (12.2) și să spunem că *S* reprezintă implicația *Cpq*, iar *R* reprezintă incompatibilitatea *Dpq*. Formula (12.2) devine:

(12.4) $\rhd ACpqDpq \equiv K \rhd Cpq \rhd Dpq$

Folosind tabelul nr. 2, alcătuit în conformitate cu definiția lui W. Quine, din formula (12.4) putem deriva expresia:

(12.5) $KCpqDpq \equiv KMpqXpq$

a cărei testare matricială ilustrează faptul că nu e o formulă validă. Dacă, pornind de la formula (12.4), am fi folosit în continuare definiția lui I. Copi, în locul formulei (12.5) am fi obținut o altă formulă validă. Discuția noastră conduce, fără îndoială, la ideea unei deosebiri de principiu între definițiile date dualității de W. Quine și I. Copi.

Comparația dintre cele două definiții ar putea continua și cu alte exemple, pentru a pune în evidență și alte deosebiri dintre ele, dar socotim că ceea ce era important privind diferența dintre cele două definiții a fost deja indicat. Este de fapt vorba de ceea ce consemnează Teorema Dualității dată de I. Copi, formula (12.1), fapt care nu poate fi recunoscut ca avînd valabilitate generală în lumina definiției adoptată de W. Quine. În consecință, Teorema Dualității dată de I. Copi este respinsă ca teoremă de definiția lui W. Quine. Dar dacă această expresie este respinsă ca teoremă pe baza definiției lui W. Quine, totuși, în baza definiției sale, I. Copi îi oferă o demonstrație consistentă. După opinia noastră însă, demonstrația dată acestei teoreme de I. Copi, demonstrație realizată pe baza unei inducții complete referitoare la numărul de simboluri cuprinse în *S*, nu constituie decît o extindere a punctului (2) din definiția dualității acceptată de același autor, cu singura condiție ca regula substituției să fie corect aplicată. De fapt, cel puțin într-o parte a ei, demonstrația

oferită de I. Copi nu face altceva decît să repete punctul (2) al definiției dată de el dualității.

Oprindu-ne asupra înțelesului pe care I. Copi îl dă principiului dualității, fără îndoială că trebuie menționat faptul că, folosind teorema dualității discutată mai sus, el oferă drept exemple de aplicare a principiului dualității, cel puțin trei teoreme. Dar toate aceste teoreme, cu excepția Teoremei Dualității însăși, pot fi obținute și în baza definiției lui W. Quine. Nu ne oprim aici asupra modalității concrete prin care teoremele la care ne referim pot fi derivate pe baza definiției lui W. Quine; de acest lucru urmează să ne ocupăm într-un capitol următor unde, credem, această chestiune își află un loc mai potrivit. Pentru moment, amintim, doar sub titlul de exemplu, că una dintre aceste teoreme vizează comutativitatea cuantorilor, iar alta este analoagă celei de a cincea legi a dualității, oferită de W. Quine.

Față de cele spuse pînă în prezent despre sistemul dualității propus de I. Copi, nu credem că am putea trece cu vederea faptul că nu puține din aserțiunile făcute de I. Copi, în baza definiției sale, sînt supuse unor restricții. Pentru a ilustra afirmația noastră vom cita două exemple. Astfel, dacă S este o schemă al cărei dual se notează $\triangleright S$, atunci formula:

(12.6) $\triangleright \triangleright S \equiv S$

este validă, *dacă și numai dacă S nu conține nici o parte de tipul NNP* (unde N este semnul negației). La fel, formula:

(12.7) $\triangleright NS \equiv N \triangleright S$

este la rîndul ei validă, *dacă și numai dacă S conține mai mult decît un simbol.*

Pe lîngă restricțiile presupuse, așa cum se vede din cazul formulelor (12.6) și (12.7), mai trebuie arătat că definiția lui I. Copi permite derivarea legilor lui Augustus De Morgan, dar pentru început numai într-o formă particulară a lor. Astfel, fiind dată o conjuncție, să spunem „*Kpq*", conform definiției dualității dată de I. Copi, dualul ei ar fi disjuncția „*ANpNq*". Conform Teoremei Dualității (DuT), dualul aceleiași conjuncții ar fi formula „*NKpq*". Avem deci două forme de exprimare a dualului unei singure expresii și prin urmare putem socoti formula

(12.8) $NKpq \equiv ANpNq$

drept o expresie validă. Se remarcă cu ușurință că formula (12.8) reprezintă una din expresiile cunoscute sub numele de „legile lui Augustus De Morgan”, dar nu una dintre expresiile prime, ci o alta care vizează cazul particular al definirii negației unei conjuncții printr-o disjuncție cu termenii negați. Nu va fi greu de observat că, în mod analog, poate fi obținută și o altă lege a lui A. De Morgan, corespondenta celei exprimate de formula (12.8) , pentru cazul disjuncției:

(12.9) $NApq \equiv KNpNq$

Înțelegînd prin expresia primă a legilor lui A. De Morgan cazurile de definire a unei conjuncții și paralel, de definire a unei disjuncții, fără îndoială că ele pot fi obținute pornind mai departe de la formulele (12.8) și (12.9) și folosind legea dublei negații. Să luăm un exemplu. Pornim de la formula (12.8) în care înlocuim pe p cu Np și pe q cu Nq, aplicăm apoi legea dublei negații și schimbînd locul termenilor echivalenți, obținem:

(12.10) $Apq \equiv NKNpNq$

Într-un mod cu totul analog, pornind însă de la formula (12.9), obținem expresia corespunzătoare definiției conjuncției prin disjuncție:

(12.11) $Kpq \equiv NANpNq$

Remarcăm faptul că la nivelul formulelor (12.10) și (12.11) avem o expresie a principiului dualității așa cum el este înțeles nu numai de W. Quine, dar și de aproape toți ceilalți autori consultați de noi. Dintre toți acești autori numai I. Copi prezintă un alt mod de a înțelege dualitatea, modalitate preluată fără comentarii și de G. Keene [27 p. 62—66]. Să ne exprimăm mai clar. Se pare că întreaga literatură a logicii simbolice care a consemnat principiul dualității, evident cu excepția mai sus citată, recunoaște drept un exemplu clasic de dualitate relația dintre conjuncție și disjuncție. Altfel spus, acest lucru înseamnă că dualul conjuncției este disjuncția și reciproc, dualul disjuncției este conjuncția. Tocmai în acest fel înțelegem să asertăm că formulele (12.10) și (12.11) dau expresie dualității. De fapt, formula (12.10) spune că dualul conjuncției este disjuncția, iar formula (12.11) consemnează că dualul disjuncției este conjuncția. Dar felul în care I. Copi

înțelege dualitatea este sensibil diferit de acesta. Astfel, conform părerii generale, formula

(12.12) $\triangleright Kpq \equiv Apq$

este un mijloc de a spune că dualul conjuncției este disjuncția. După opinia lui I. Copi însă formula

(12.13) $\triangleright Kpq \equiv ANpNq$

este forma de exprimare a dualului unei conjuncții, drept disjuncția negațiilor termenilor conjuncției inițiale. Acum, dacă am presupune că opinia lui I. Copi — adoptată, cum spuneam, şi de G. Keene — este compatibilă cu opinia celorlalți logicieni, despre dualitate, adică dacă am presupune că ambele formule (12.12) şi (12.13), sînt valide, atunci fără îndoială că ar trebui să fie acceptată ca validă şi formula:

(12.14) $Apq \equiv ANpNq$

dar este imposibil a accepta că o disjuncție este acelaşi lucru cu disjuncția negațiilor termenilor ei. Formula (12.14) este respinsă ca nevalidă indiferent care ar fi opinia asupra dualității acceptată de un autor sau altul. Dar formula (12.14) a fost obținută ca o concluzie din premisele (12.12) şi (12.13), folosind ca reguli de deducție comutivitatea şi tranzitivitatea echivalenței. Cum nici una dintre aceste reguli nu poate fi respinsă, urmează că cel puțin una din premise, adică sau formula (12.12), sau formula (12.13), să fie respinsă ca nevalidă. Noi sîntem tentați să credem că numai una dintre aceste premise trebuie respinsă ca nevalidă şi anume, cea care consemnează opinia lui I. Copi despre dualitate, adică formula (12.13). Dar a respinge formula (12.13), înseamnă a respinge definiția dată de I. Copi dualității, deci a accepta formula (12.12), adică definiția dualității dată de W. Quine.

Într-adevăr, prin înțelesul pe care îl dă dualității, I. Copi diferă principial de ceea ce s-ar putea spune că este unanim acceptat cu privire la dualitate de către logica modernă şi nu numai de ea ci şi de către matematici. Ca atare, respingînd opinia lui I. Copi şi acceptînd cealaltă definiție dată dualității, dispunem de un alt argument decît cel al opiniei majorității? Putem răspunde afirmativ la această întrebare.

Pentru a alcătui răspunsul vom porni de la un alt autor contemporan, şi anume, de la Benson Mates care înțelege duali-

tatea în același fel cu W. Quine, [35 p. 133], deși am putea remarca un element nou în tratarea dualității, element pe care îl considerăm important. Este vorba de faptul că B. Mates încadrează studiul dualității într-un capitol dedicat meta-teoremelor și modul concret în care el analizează dualitatea atestă pe deplin concluzia că el înțelege această relație ca ținînd de un nivel de generalitate superior logicii standard și calculului asociat ei. Fără îndoială că, aderînd la poziția generală despre dualitate — ne referim la definiția dualității — pentru B. Mates dualitatea este distinctă de negație. Mai mult, el indică și demonstrează o „teoremă a negației" [35 p. 130]. Fără a intra în detalii tehnice privind demonstrația acestei teoreme, o vom enunța și noi, urmînd, evident, lucrarea lui B. Mates.

În primul rînd, se presupune că „Φ" este o formulă oarecare alcătuită însă numai prin intermediul conjuncției, disjuncției și negației, a cuantificatorului universal și a celui existențial. Evident, acest deziderat poate fi atins oricare ar fi formula „Φ" și pentru aceasta, este suficient să amintim procedeul oferit de W. Quine pentru transcrierea oricărei expresii prin intermediul conjuncției și negației sau al disjuncției și negației [44 p. 9—12]. Mai departe, dacă „Φ" este o astfel de formulă și dacă în cadrul ei facem următoarele schimbări:

(1) schimbăm reciproc conjuncția cu disjuncția;
(2) schimbăm între ei cuantorul universal cu cel existențial;
(3) înlocuim orice formulă atomară cu negația ei; obținînd pe această cale o nouă formulă „Φ'",

atunci „Φ'" este echivalentă cu negația lui „Φ".

Este, fără îndoială, lesne de observat că teorema negației enunțată de B. Mates este identică — sub aspectul conținutului și nu al formei de exprimare — cu definiția dualității oferită de I. Copi. Urmînd cele spuse de B. Mates, rezultă că formulele (12.8) și (12.9) nu țin de principiul dualității ci de definiția negației. Aceste formule arată în ce constă negația și nu dualul unei conjuncții — formula (12.8) — sau dualul unei disjuncții — formula (12.9).

Pentru a obține din formulele (12.8) și (12.9) chiar dualul, așa cum acesta este înțeles de W. Quine, trebuie să comple-

tăm procesul de aplicare a negației (a se vedea în acest sens cea de a doua lege a dualității, oferită de W. Quine). Pînă acum am construit numai negația formulei ca întreg; urmează deci a aplica negația și asupra fiecărui termen (formulă atomară) al formulei și astfel vom obține expresia dualului. Aceasta înseamnă însă, așa cum arătam mai sus, a trece de la formulele (12.8) și (12.9) la formulele (12.10) și respectiv (12.11).

Pînă în prezent, apelul pe care l-am făcut la teorema negației demonstrată de B. Mates nu a adus un element principial nou în încercarea de a explica de ce nu acceptăm definiția dualității dată de I. Copi. Am arătat doar că I. Copi însuși recunoaște, prin teorema sa a dualității, că în conformitate cu definiția pe care el a dat-o dualității, se realizează o echivalență între dualitate și negație. Noi ne-am referit la teorema negației pentru a vedea că, în cazul lui I. Copi, echivalența dualitate-negație nu este nici pe departe un accident sau un caz particular, ci este o chestiune de principiu, o chestiune fundamentală pentru concepția sa asupra principiului dualității.

În consecință, încercînd să definească dualitatea, I. Copi a definit negația, fiind obligat, în acest sens, să aserteze echivalența dintre dualitate și negație. Dar dacă dualitatea și negația sînt unul și același lucru, cel puțin așa cum spun teorema și definiția dualității oferite de I. Copi, este surprinzător, știind că nivelul logicii standard n-a fost depășit, că formula (12.6) este validă numai sub restricții de tipul celor citate. În plus, a spune „valid sub restricții" — avînd în vedere tipul de restricții cerut pentru formulele discutate aici, înseamnă a respinge conceptul de validitate. Pe de altă parte, și acesta nu este un fapt de loc lipsit de importanță, dacă acceptăm echivalența dintre dualitate și negație propusă de I. Copi, orice studiu al dualității este lipsit de interes din moment ce dispunem de studii despre negație și în plus numele de *dualitate* nu mai are nici un rost. Principiul dualității ar fi de fapt, în această perspectivă, un principiu al negației și tot ce se spune a fi consecință sau manifestare a principiului dualității n-ar fi decît consecință sau manifestare a principiului negației. Negația ar fi adevăratul și singurul autor al tuturor celor puse în seama dualității și de fapt ar fi lipsit de sens să mai vorbim de dualitate. Indiferent însă ce gîndește I. Copi despre duali-

tate și despre raportul dintre dualitate și negație, nu poate fi pusă la îndoială existența unei alte relații, distinctă de ceea ce I. Copi înțelege prin relația de dualitate; ne referim la ceea ce este definit de W. Quine, în acord cu majoritatea logicienilor moderni, drept dualitate. Dacă încercăm să folosim numele *dualitate* pentru negație, așa cum face I. Copi, atunci trebuie să aflăm un nume nou pentru ceea ce W. Quine numește dualitate. Pornind însă de la faptul că negației i se poate spune pe nume fără a ne expune vreunui pericol, considerăm mai adecvat să folosim numele *dualitate* pentru acea relație, distinctă față de negație, definită de W. Quine drept relație de dualitate. În acest sens înțelegem să ne ocupăm de dualitate în prezenta lucrare.

Evident, nu respingem ideea că sistemul oferit de I. Copi sub titlul de „analiză a dualității" se bucură de consistență, atît de departe cît noi am putut cerceta acest lucru. Acest fapt este firesc, căci negația este un operator logic ca oricare altul și respectînd proprietățile sale putem obține un sistem consistent, indiferent care ar fi motivele pentru care, pentru moment, am numi acest operator „dualitate" și nu negație, pe numele lui adevărat. Singurul lucru care trebuie însă consemnat este acela că, dacă, așa cum vrea I. Copi, dualitate înseamnă negație, atunci un sistem formal numit „al dualității" și în care am deduce o serie de teoreme, folosind, evident, și alți operatori ai *CP* — I. Copi indică această posibilitate — nu este decît un „sistem al negației" și sub aspectul teoremelor el repetă, numai cu pretenția de noutate, unele sisteme deja cunoscute. Astfel, dacă punctul de plecare presupune alături de dualitate conjuncția, sistemul obținut este, de fapt, sistemul *KN*; dacă alături de dualitate presupunem disjuncția, atunci avem sistemul *AN*, dacă presupunem implicația vom avea sistemul *CN* ș.a.m.d.

Respingînd identificarea dintre dualitate și negație, așa cum acest lucru apare la I. Copi, nu înlăturăm și ideea oricăror legături, sau asemănări dintre dualitate și negație. În anumite cazuri, cu totul particulare, vom putea spune, într-un anume sens, chiar că dualul unei expresii este echivalent cu negația aceleiași expresii, dar aceasta este o situație cu totul accidentală care, nu numai că nu poate fi ridicată la rangul de definiție generală a dualității, dar nici nu contrazice această definiție generală. Adoptînd ideea de dualitate ca

distinctă față de cea de negație, vom putea constata că raportul dualitate-negație este cu mult mai complex decît tinde să-l prezinte I. Copi. Sperăm ca paragrafele următoare ale lucrării să întărească și mai mult cele spuse pînă acum. Conchidem această discuție spunînd că am constatat două păreri deosebite despre dualitate şi că din cele două noi o acceptăm pe aceea pe care am descris-o ca fiind enunțată de W. Quine.

3. TIPURI DE OPERATORI DUALI

După ce am precizat punctul de vedere asupra definiției dualității, vom încerca să desprindem cîteva aspecte ce ni se par importante în legătură cu principiul dualității astfel înțeles. Evident, legînd posibilitatea de a discerne aceste aspecte de înțelesul pe care l-am acceptat pentru dualitate, revenim pentru aceasta la tabelul nr. 2 din paragraful anterior.

Examinînd cele două coloane ale tabelului nr. 2, vom constata că relația de dualitate presupune anumite deosebiri după operatorii între care ea există. Luînd în considerație tocmai aceste deosebiri, deci avînd, în ultimă instanță, drept criteriu tocmai natura operatorilor binari ai *CP*, îi putem clasifica pe aceștia, sub perspectiva principiului dualității, în trei clase diferite.

I. Prima clasă cuprinde perechile de operatori: (1) — (16) — *tautologie* și *contradicție* — și (6) — (11) — *echivalență* și *disjuncție exclusivă*. Ceea ce caracterizează, din perspectiva dualității, operatorii înscrişi în această primă clasă este faptul că pentru oricare din ei *dualul coincide cu negația*. Se poate deci constata că în cazul operatorilor menționați nu există, într-un anume sens, o diferență față de înțelesul pe care I. Copi l-a dat dualității. Precizăm însă că această situație este caracteristică doar operatorilor din această primă clasă și în plus nu afectează cu nimic definiția dualității acceptată de noi. Punctul comun cu cele afirmate de I. Copi cu privire la dualitate trebuie înțeles numai în sensul că în cazul particular al operatorilor din prima clasă, aplicarea operației de dualizare duce la acelaşi rezultat cu aplicarea operației de negare și nu în sensul că cele două operații ar fi identice. În această perspectivă, situația particulară a operatorilor din prima clasă nu contra-

zice definiția dualității acceptată de noi. Mai precis, în cazul acestei prime clase, atunci cînd operatorul din prima coloană a tabelului nr. 2 este descris „$(v_1, v_2, v_3, v_4)pq$", dualul său poate fi descris „$(Nv_1, Nv_2, Nv_3, Nv_4)pq$". În consecință, în situația operatorilor ce formează prima clasă, dualul poate fi obținut și prin inversarea numai, cu ajutorul negației, a soluției funcției de adevăr alcătuită printr-un astfel de operator, fără a afecta în același timp și variabilele propoziționale componente. Altfel spus, pentru operatorii considerați, negația variabilelor proporționale componente și în același timp a funcției constituite cu ajutorul lor ca întreg, duce la același rezultat, pentru operația de dualizare, cu negația numai a funcției ca întreg.

II. A doua clasă grupează perechile de operatori duali: (2) — (12) — *disjuncția* și *conjuncția*, (3) — (13) — *implicația materială inversă* și *negația implicației materiale*, (4) — (14) — *implicația materială* și *negația implicației materiale inverse* și (5) — (15) — *incompatibilitatea* și *operatorul „nici ... nici ..."*, sau functorul lui Nicod. În acest caz, dualul unui operator este deosebit atît față de negația operatorului supus operației de dualizare, cît și față de operatorul supus operației de dualizare. Din punctul de vedere al raportului dualitate-negație, de această dată cele două operații se deosebesc nu numai prin conținutul și mecanismul lor, ci și prin rezultatul lor.

III. Cea de a treia clasă înglobează operatorii înregistrați în tabelul nr. 1, sau în tabelul nr. 2 sub numele (7), (8), (9) și (10), adică *Fpq*, *Gpq*, *Hpq* și *Ipq*. Aplicînd operația de dualizare asupra unei funcții de adevăr de două variabile proporționale conectate de oricare din operatorii ce formează această a treia clasă, din perspectiva dualității, vom obține ca soluție a funcției de adevăr duale exact valorile de adevăr ce alcătuiesc soluția funcției de adevăr supusă operației de dualizare. Cu alte cuvinte, dacă unul din acești patru operatori ar fi descris „$(v_1, v_2, v_3, v_4)\ pq$", dualul său poate fi descris în mod identic. În consecință, fiecare din operatorii celei de a treia clase este propriul său dual. Reîntîlnim, la nivel logic de această dată, așa-numitele cazuri de elemente *auto-duale*. Pentru acești operatori auto-duali se poate spune, aceasta pentru a păstra o anu-

mită simetrie cu modul în care a fost făcută descrierea operatorilor înscriși în prima clasă, că operația de dualizare aplicată funcțiilor de adevăr corespunzătoare acestor operatori nu presupune nici un fel de intervenție a negației, nici asupra funcției ca întreg, nici asupra variabilelor propoziționale ce alcătuiesc funcția de adevăr. În consecință, în cazul acestor patru operatori, luînd în considerație definiția dualității acceptată de noi, se poate spune că negarea valorilor de adevăr din soluția funcției de adevăr corespunzătoare unuia din ei și negarea simultană a fiecărei variabile propoziționale componente a funcției duce la același rezultat cu asertarea funcției de adevăr supusă inițial operației de dualizare.

Revenim acum la operatorii incluși în cea de a doua clasă și analizînd operația de dualizare pentru fiecare din operatorii incluși în această clasă, vom remarca existența a două subclase:

(c_1) Oricare din operatorii înscriși în cele două tabele din paragraful anterior sub numerele (2), (5), (12) și (15), fiind descris prin „$(v_1, v_2, v_3, v_4)pq$”, dualul său va putea fi descris prin „$(v_1, Nv_2, Nv_3, v_4)pq$”. Altfel spus, pentru acești patru operatori, operația de dualizare care ar presupune o mult mai complicată aplicare a negației asupra funcției de adevăr corespunzătoare oricăruia din ei, poate fi simplificată prin respingerea, prin intermediul negației numai a acelor valori de adevăr din soluția funcției de adevăr corespunzătoare situațiilor cînd valorile de adevăr ale variabilelor componente sînt diferite;

(c_2) Oricare din operatorii înscriși în cele două tabele, anterior, prezentate, sub numerele (3), (4), (13) și (14), fiind descris prin „$(v_1, v_2, v_3, v_4)pq$”, dualul său va putea fi descris prin „$(Nv_1, v_2, v_3, Nv_4)pq$”. Altfel spus, pentru acești patru operatori, aplicarea operației de dualizare asupra unei funcții de adevăr corespunzătoare oricăruia din ei, poate fi redusă la aplicarea negației numai asupra acelor valori de adevăr din soluția funcției de adevăr considerate care corespund cazurilor cînd variabilele componente ale funcției au aceleași valori de adevăr.

Reamintim faptul că deși sub-clasele (c_1) și (c_2) au fost posibile de alcătuit pe baza unei deosebiri ce există, din perspectiva

operației de dualizare, între elementele fiecăreia din sub-clasele considerate, există totuși o proprietate, comună a lor care unește cele două sub-clase într-o clasă unică. Presupunînd că avem o funcție de adevăr alcătuită din variabile propoziționale conectate de oricare din operatorii ce formează cele două sub-clase, operația de dualizare a acestei funcții nu este echivalentă, sub nici un aspect, nici cu negația funcției considerate, nici cu funcția inițială supusă operației de dualizare.

Privind retrospectiv asupra celor trei clase prezentate mai sus, putem spune că definită ca distinctă de negație, dualitatea ne permite să desprindem anumite deosebiri privind chiar aplicarea negației la funcții de adevăr diferite. Acest lucru a reieșit de fiecare dată atunci cînd am încercat să caracterizăm operatorii fiecărei clase din perspectiva dualității. De asemenea, numai într-un caz particular operația de dualizare se confundă cu negația (operatorii din prima clasă) și aceasta se realizează numai sub aspectul rezultatului aplicării celor două operații, dar că, nici măcar sub acest aspect, o echivalență între dualitate și negație nu poate fi totuși generalizată asupra tuturor operatorilor *CP*, așa cum procedează I. Copi, e adevărat, pornind de la o altă definiție a dualității. O eventuală acceptare a echivalenței dintre dualitate și negație ar anula posibilitatea de alcătuire a celor trei clase de operatori din perspectiva dualității. Credem că raportul dintre dualitate și negație este mult mai nuanțat decît o simplă echivalență, așa cum de altfel rezultă din aplicarea operației de dualizare în înțelesul adoptat de noi.

Iată un exemplu privind legătura dualitate-negație, așa cum ni-l oferă operatorii din cea de a doua clasă și în care, investigația din paragrafele următoare ne va permite să sesizăm o veritabilă proprietate generală a raportului dualitate-negație. Astfel, negația dualului unui operator dat este echivalentă cu dualul negației aceluiași operator. Concret, fiind dată disjuncția, *Apq*, dualul ei este conjuncția, *Kpq*. În același timp însă conjuncția *Kpq* este negația incompatibilității, *Dpq*, care, la rîndul ei, este dualul operatorului „nici .... nici ....", *Xpq*, dar operatorul „nici .... nici ...." este negația primului operator, disjuncția *Apq*.

Dacă dualul *disjuncției* este *conjuncția* și dacă la rîndul ei *conjuncția* este negația *incompatibilității*, atunci rezultă că

dualul *disjuncției* este echivalent cu negația *incompatibilității*:

(1) $\triangleright Apq \equiv Kpq$
(2) $Kpq \equiv NDpq$

---

(3) $\triangleright Apq \equiv NDpq$

Mai departe, dacă dualul *disjuncției* este echivalent cu negația *incompatibilității* și dacă *incompatibilitatea* este echivalentă cu dualul *operatorului* *„nici ... nici ...”*, atunci dualul *disjuncției* este echivalent cu negația dualului *operatorului* *„nici ... nici ...”*:

(3) $\triangleright Apq \equiv NDpq$
(4) $Dpq \equiv \triangleright Xpq$

---

(5) $\triangleright Apq \equiv N \triangleright Xpq$

În sfîrșit, dacă dualul *disjuncției* este echivalent cu negația dualului *operatorului* *„nici ... nici ...”* și dacă negația *operatorului* *„nici ... nici ...”* este echivalentă cu *disjuncția*, atunci rezultă că dualul negației *operatorului* *„nici ... nici ...”* este echivalent cu *negația* dualului aceluiași operator:

(5) $\triangleright Apq \equiv N \triangleright Xpq$
(6) $Apq \equiv NXpq$

---

(7) $\triangleright NXpq \equiv N \triangleright Xpq$

Raționamentul întrebuințat de noi a cuprins trei etape. În primul caz, concluzia derivă în mod necesar din premisele asumate în baza tranzitivității echivalenței, iar în cazurile doi și trei concluzia rezultă în același fel pe baza regulei schimbului reciproc de echivalenți.

Prin intermediul acestui șir de raționamente am probat pentru un caz concret — functorul lui Nicod — aserțiunea făcută mai sus cu privire la faptul că negația dualului unui operator oarecare este echivalentă cu dualul negației aceluiași operator. Paragrafele următoare ne vor oferi mijloacele pentru a putea proba generalitatea aserțiunii noastre, sau altfel spus, de a arăta că ea denotă o proprietate generală a raportului dualitate-negație.

Dacă facem apel la operatorii înscriși în sub-clasa (c_2), atunci vom constata și la nivelul lor aceleași relații ca în cazul operatorilor din prima sub-clasă. Astfel, presupunînd că este dat operatorul ce ocupă în tabelul nr. 1 poziția (4), adică implicația materială, *Cpq*, dualul său este operatorul de la poziția (14), negația implicației materiale inverse, *Mpq*. Dar *Mpq*, la rîndul său, se află în raport de la afirmație la negație cu implicația materială inversă, *Bpq*, care la rîndul său este dualul negației implicației materiale, *Lpq*. Între *Cpq* și *Lpq* există un raport ca de la afirmație la negație. La fel cu operatorii din prima sub-clasă și acești patru operatori confirmă afirmația de mai sus. Folosind aceleași reguli de deducție ca în cazul anterior, vom putea dezvolta și de această dată un raționament analog celui anterior. Astfel, dacă dualul *implicației materiale* este echivalent cu *negația implicației materiale inverse* și dacă între *Mpq* și *Bpq* există un raport ca de la afirmație la negație, atunci dualul *implicației materiale* este echivalent cu *negația implicației inverse*:

(1) $\triangleright Cpq \equiv Mpq$
(2) $Mpq \equiv NBpq$
---
(3) $\triangleright Cpq \equiv NBpq$

Mai departe, dacă dualul *implicației materiale* este echivalent cu negația *implicației inverse* și dacă *implicația inversă* este echivalentă cu dualul *negației implicației materiale*, atunci dualul *implicației materiale* este echivalent cu negația dualului *negației implicației materiale*:

(3) $\triangleright Cpq \equiv NBpq$
(4) $Bpq \equiv \triangleright Lpq$
---
(5) $\triangleright Cpq \equiv N \triangleright Lpq$

În sfîrșit, dacă dualul *implicației materiale* este echivalent cu negația dualului *negației implicației materiale* și dacă *implicația materială* este echivalentă cu negația *negației implicației materiale*, atunci dualul negației *negației implicației materiale* este echivalent cu negația dualului *negației implicației materiale*:

(5) $\triangleright Cpq \equiv N \triangleright Lpq$
(6) $Cpq \equiv NLpq$
---
(7) $\triangleright NLpq \equiv N \triangleright Lpq$

Pe baza exemplelor verificate pînă acum s-ar putea sugera ideea că proprietatea după care dualul negației unui operator este echivalent cu negația dualului aceluiași operator convine operatorilor înscriși în cele două sub-clase ale celei de a doua clase. Paragrafele următoare ne vor permite nu numai tratarea generalizată a acestei proprietăți a raportului dualitate-negație, ci ne vor da, totodată, mijloacele necesare pentru a desprinde semnificația acestei proprietăți.

4. PĂTRATUL LOGIC AL DUALITĂȚII

Operatorilor ce formează cea de a doua clasă și numai lor, le aparține și proprietatea de a se afla în astfel de raporturi între ei încît, în conformitate cu sub-clasele în care sînt încadrați, ei dau naștere la funcții de adevăr de două variabile propoziționale astfel legate între ele încît valorile de adevăr ale acestor funcții pot fi derivate unele din altele într-o manieră cu totul analoagă celei proprii pătratului clasic al judecăților de predicație. Această nouă proprietate a operatorilor din cea de a doua clasă este fără îndoială un element important pentru comparația dintre logica tradițională și logica standard.

Să ne oprim acum atenția asupra operatorilor ce formează sub-clasa (c_1) a acestei clase.

Între conjuncție și disjuncție vom putea constata existența unei relații de subalternare. Aceeași relație se stabilește și de la operatorul „nici ... nici ...” la incompatibilitate. De fapt, pentru ca o conjuncție să fie adevărată, în mod necesar ea trebuie să aibă toate componentele ei adevărate. Dar sub o astfel de condiție, disjuncția acelorași componente va fi în mod necesar adevărată. Pentru ca o disjuncție să fie falsă este obligatoriu ca toate componentele ei să fie false, or această condiție este mai mult decît suficientă pentru ca unei conjuncții a acelorași componente să-i corespundă valoarea de adevăr *fals*. Dar dacă presupunem că o conjuncție are valoarea de adevăr *fals*, fără să precizăm nimic despre valoarea de adevăr a componentelor ei, nu putem infera nimic în mod necesar cu privire la valoarea de adevăr a disjuncției corespunzătoare. Mai precis, se știe, că pentru o conjuncție, condiția de falsi-

tate este minimă, ea fiind falsă dacă numai unul din componenții ei este fals la fel de bine ca și atunci cînd toți componenții ei sînt falși. În această situație, dacă numai unul din componenții conjuncției este fals, disjuncția corespunzătoare este adevărată, întrucît ceilalți componenți sînt adevărați. În schimb, dacă o conjuncție este falsă pentru că toți componenții ei sînt falși, atunci va fi falsă și disjuncția corespunzătoare ei. Rezultă că din simplul fapt al falsității unei conjuncții nu putem infera nimic necesar cu privire la valoarea de adevăr a disjuncției corespunzătoare. Aceeași situație de lipsă de certitudine putem constata și atunci cînd dorim să trecem de la valoarea de adevăr *adevăr* a disjuncției la valoarea de adevăr a conjuncției. Astfel, am putea spune „prin dualitate", condiția de adevăr a disjuncției este minimă, căci pentru o disjuncție este suficient ca unul singur din componenții ei să fie adevărat pentru ca întregii disjuncții să-i corespundă valoarea de adevăr *adevăr*; cu atît mai mult disjuncția va fi adevărată dacă toți componenții ei vor fi adevărați. Dar pentru ca unei conjuncții să-i corespundă valoarea de adevăr *adevăr* este imperios necesar ca tuturor componenților ei să le revină valoarea de adevăr *adevăr*. În acest fel, din adevărul disjuncției nu rezultă nimic, în mod necesar, pentru valoarea de adevăr a conjuncției corespunzătoare.

Din analiza făcută rezultă adevărul asertiunii inițial făcute, după care, între conjuncție și disjuncție există un raport de subalternare, analog celui clasic dintre judecățile universale și cele particulare de aceeași calitate. Din adevărul supraalternului (conjuncția) rezultă în mod necesar adevărul subalternului (disjuncția); la fel, din falsitatea subalternului, rezultă în mod necesar falsitatea supraalternului. În continuare, din falsitatea supraalternului nu rezultă nimic, în mod necesar, pentru valoarea de adevăr a subalternului iar din adevărul subalternului nu rezultă nimic, în mod necesar, pentru valoarea de adevăr a supraalternului. Un raport întrutotul identic există și între operatorul „nici ... nici ...", ca supraaltern și incompatibilitate, ca subaltern.

În schimb, raportul existent între conjuncție și operatorul „nici ... nici ..." este analog raportului de contrarietate dintre judecățile de predicație universale. Astfel, dacă conjuncției îi corespunde valoarea de adevăr *adevăr*, înseamnă că toți componenții ei sînt adevărați și în consecință, funcția de ade-

văr constituită din aceiași componenți conectați între ei de operatorul „nici ... nici ..." va fi în mod necesar falsă. Este cunoscut că pentru operatorul „nici ... nici ..." este suficient un singur component adevărat pentru a da naștere unei funcții de adevăr false. În schimb, pentru ca o funcție de adevăr, alcătuită de operatorul „nici ... nici ..." să fie adevărată este necesar ca fiecăruia din componenții ei să-i corespundă valoarea de adevăr *fals*, dar acest fapt atrage după sine în mod necesar falsitatea conjuncției corespunzătoare. Dacă pornim din nou de la conjuncție, pe care o considerăm de data aceasta falsă, nu vom putea infera nimic, în mod necesar, cu privire la valoarea de adevăr a funcției de adevăr corespunzătoare, alcătuită de operatorul „nici ... nici ...". Mai precis, dacă un singur component al conjuncției este fals, atunci funcția de adevăr corespunzătoare acestei conjuncții, alcătuită din operatorul „nici ... nici ..." va fi la rîndul ei falsă, dar dacă falsitatea conjuncției se datorește falsității tuturor componenților ei, atunci, fără îndoială că cea de a doua funcție de adevăr, cea alcătuită de operatorul „nici ... nici ...", va fi adevărată. Într-un mod cu totul analog, din falsitatea unei funcții de adevăr alcătuită de operatorul „nici ... nici ..." nu putem infera nimic, în mod necesar, cu privire la valoarea de adevăr a conjuncției corespunzătoare, căci operatorul „nici ... nici ..." dă naștere unei funcții de adevăr false în două situații: cînd numai unul din componenții acestei funcții are valoarea de adevăr *adevăr*, sau cînd toți componenții ei au valoarea de adevăr *adevăr*. În prima situație, conjuncția corespunzătoare va fi la rîndul ei falsă, dar în cea de a doua situație ea va fi adevărată. Fără îndoială că analiza de mai sus pune în evidență faptul că între conjuncție și operatorul „nici ... nici ..." există un raport de contrarietate, căci funcțiile de adevăr alcătuite de cei doi operatori binari ai *CP* dacă au, evident, aceiași componenți, nu pot fi adevărate ambele, în același timp și sub același raport, dar pot fi ambele false.

Relația ce există între disjuncție și incompatibilitate poate fi caracterizată drept un raport de subcontrarietate. Astfel, pentru ca disjuncția să fie falsă trebuie ca toți componenții ei să fie falși, dar în acest caz, în mod necesar, incompatibilitatea va fi adevărată. Dacă incompatibilitatea este falsă, asta înseamnă că toți componenții ei sînt adevărați și deci,

în mod necesar, disjuncția corespunzătoare ei va fi adevărată. Reținem deci: singura condiție de falsitate a disjuncției implică în mod necesar adevărul incompatibilității și reciproc, singura condiție de falsitate a incompatibilității implică în mod necesar adevărul disjuncției. În schimb, din adevărul disjuncției nu rezultă nimic, în mod necesar, privitor la valoarea de adevăr a incompatibilității, iar din adevărul incompatibilității nu rezultă nimic, în mod necesar, pentru valoarea de adevăr a disjuncției. Pentru ca o disjuncție să fie adevărată, este suficient ca cel puțin un component al ei să fie adevărat, dar aceasta nu este un criteriu sigur pentru valoarea de adevăr a incompatibilității. Dacă numai un singur component este adevărat, incompatibilitatea este adevărată și ea, dar dacă toți componenții funcției de adevăr sînt adevărați, atunci incompatibilitatea este falsă. Mai departe, dacă incompatibilitatea este adevărată, înseamnă că cel puțin unul din componenții ei este fals, dar nu este deloc exclus să fie falși chiar toți. Dacă numai unul singur este fals, disjuncția corespunzătoare este adevărată, dar dacă toți componenții ei sînt falși, disjuncția corespunzătoare este falsă și ea. Concluzia analizei noastre este că între disjuncție și incompatibilitate există un astfel de raport încît ambii operatori nu pot forma simultan, adică în același timp și sub același raport, două funcții de adevăr false. În schimb, cele două funcții de adevăr pot fi simultan adevărate. Numele unui astfel de raport nu poate fi altul decît raport de subcontrarietate.

În sfîrșit, între conjuncție și incompatibilitate, pe de o parte, și între operatorul „nici ... nici ..." și disjuncție, pe de altă parte, există un astfel de raport încît cu ajutorul negației se poate trece de la unul la celălalt. Astfel, dacă considerăm conjuncția, atunci incompatibilitatea apare ca negație a sa. La fel, dacă pornim de la incompatibilitate, conjuncția apare ca negație a incompatibilității. O astfel de situație sugerează existența unui raport de contradicție între operatorii care formează perechile mai sus indicate. Vom analiza numai raportul dintre conjuncție și incompatibilitate. Raportul dintre operatorul „nici ... nici ..." și disjuncție este întrutotul analog primului.

Prin urmare, presupunînd conjuncția ca fiind adevărată, știm că acest lucru este posibil numai dacă toți componenții ei sînt adevărați. Dar adevărul tuturor componenților este

singura condiție de falsitate pentru incompatibilitate. Deci, dacă conjuncția este adevărată, atunci, în mod necesar, incompatibilitatea este falsă. Considerăm acum conjuncția ca fiind falsă. De data aceasta rezultă că cel puțin unul din componenții conjuncției este fals, dar tocmai aceasta este condiția de adevăr pentru incompatibilitate și deci, dacă conjuncția are valoarea de adevăr *fals*, incompatibilitatea are în mod necesar valoarea de adevăr *adevăr*. Mai departe, condiția de adevăr a incompatibilității este condiție necesară a falsității conjuncției și deci, dacă incompatibilitatea este adevărată, în mod necesar conjuncția corespunzătoare ei este falsă. Dacă incompatibilitatea este falsă, atunci toți componenții ei sînt adevărați, dar atunci, în mod necesar, conjuncția corespunzătoare este adevărată. În concluzie, între conjuncție și incompatibilitate există un raport de contradicție. Același raport există între operatorul „nici ... nici ...” și disjuncție.

Toate acestea fac posibilă reprezentarea raporturilor dintre operatorii analizați — conjuncție, operatorul „nici ... nici ...”, disjuncție și incompatibilitate — printr-o diagramă similară pătratului logic al judecăților de predicație. Prin urmare, diagrama din figura (14.1) consemnează raporturile dintre operatorii ce formează sub-clasa (c_1).

Dacă vom analiza în aceeași manieră raporturile dintre operatorii ce formează sub-clasa (c_2), vom constata aceleași raporturi ca între operatorii ce formau prima sub-clasă. Nu mai este necesar să dezvoltăm și în acest caz o analiză detaliată asupra felului în care se interferează valorile de adevăr ale funcțiilor de adevăr alcătuite de acești operatori și ne mul-

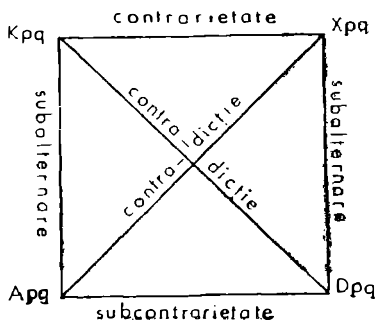


Figura 4 (14. 1)

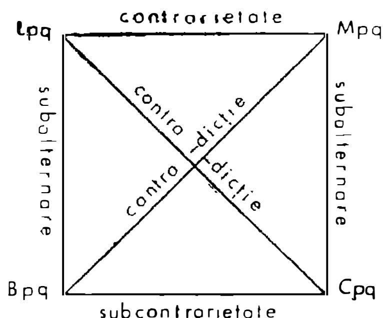


Figura 5 (14.2)

țumim doar a indica pătratul logic ce consemnează raporturile dintre acești operatori.

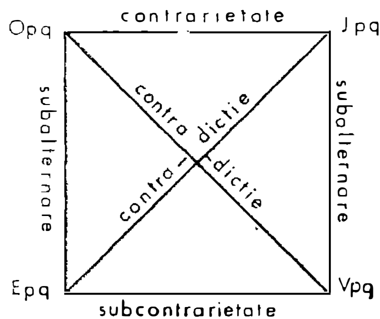
În prezentarea acestor două diagrame — figurile (14.1) și (14.2) — care reprezintă relațiile dintre operatorii *CP* ce formează, din perspectiva dualității, cea de a doua clasă, noi nu avem pretenția de a susține că ele nu au mai fost prezentate pînă acum. Pentru a folosi doar un exemplu, ele apar la R. Blanché [10 p. 56]*. Ceea ce susținem este însă legătura dintre dualitate și raporturile dintre operatorii analizați. Altfel spus, cele două pătrate logice nu sînt niște simple curiozități. Mai mult chiar, raporturile înscrise pe laturile și diagonalele acestor pătrate nu sînt rezultatul unei întîmplări, al faptului că valorile de adevăr ale acestor operatori „s-au potrivit" în așa fel încît ei au putut fi ordonați în diagrame analoage pătratului clasic al judecăților de predicație. Modul în care am analizat raporturile dintre operatorii ordonați în pătratul din figura(14.1), mod care putea fi pus în evidență și în analiza raporturilor dintre operatorii așezați în pătratul logic din figura (14.2), ne arată că nu este vorba de un simplu accident, ci că putem trece de la valoarea de adevăr a unei funcții de adevăr la valoarea de adevăr a altora pe calea unor inferențe identice cu cele proprii pătratului clasic al judecăților de predicație. Nu intenționăm a susține că vreunul din pătratele

* În conformitate cu W. H. Gottschalk [20 p. 193], această chestiune a fost studiată și de *Arnold Schmidt* în *Systematische Basisreduktion der Modalitäten bei Idempotenz der Positiven Grundmodalitäten*, Mathematische Annalen, vol. 122/1950, pp. 71—89.

logice prezentate ar fi mai mult decît asemănător pătratului clasic al judecăților de predicație. Mai precis, respingem ideea că vreunul din aceste pătrate ar traduce pătratul logic clasic într-un fel sau altul. Oricît de departe am merge cu asemănarea dintre pătratele logice prezentate în acest paragraf și pătratul logic clasic, nu putem uita că ele se deosebesc cel puțin prin elementele care intră în raporturi în fiecare dintre ele. Dorim însă să subliniem că aceste două pătrate logice sînt la fel de firești, la fel de consistente din punct de vedere logic ca și ceea ce logica a înregistrat sub numele de „pătratul logic al lui Boethius".

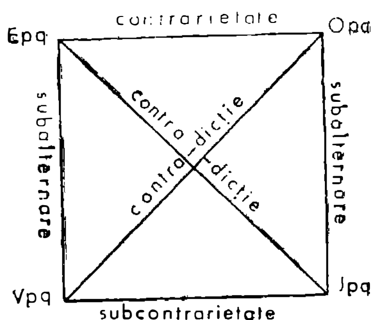
Ceea ce este specific acestor noi pătrate logice, ceea ce face posibilă construcția lor, este un anumit raport dintre dualitate și negație. Arătam mai sus că, atît pentru operatorii din sub-clasa (c_1), cît și pentru cei din sub-clasa (c_2) a celei de a doua clase, dualul este distinct atît față de negația operatorului supus dualizării cît și față de afirmația aceluiași operator. E adevărat că, numai operatorii care se bucură de această proprietate, asupra căreia vom reveni în următoarele paragrafe, numai acești operatori pot da naștere unui pătrat logic consistent. Noi am observat că analiza celor opt operatori cuprinși în cea de a doua clasă ne-a permis să alcătuim, în mod coerent, două pătrate logice. În afară de operatorii deja luați în considerație în această ordine de idei, mai dispunem de încă opt operatori binari la nivelul *CP*, dintre care jumătate formează prima clasă, iar ultima jumătate constituie ultima clasă constituită de noi în perspectiva principiului dualității.

Să încercăm o analiză similară ca cea anterioară pentru operatorii din prima clasă: *Vpq*, *Epq*, *Jpq* și *Opq*. Nu este deloc dificil să observăm că de data aceasta nu mai avem posibilitatea unor inferențe de la valoarea de adevăr a unei funcții la valoarea de adevăr a altei funcții, așa cum acest lucru a fost posibil pentru operatorii din cea de a doua clasă. Mai precis, nici nu se pune problema de a infera ceva, pornind de la falsitatea funcției *Vpq*, întrucît această funcție reprezintă o lege logică care nu e niciodată falsă. La fel, un alt exemplu îl poate oferi încercarea de a infera ceva pornind de la adevărul funcției *Opq*, care fiind totdeauna falsă, nu permite o astfel de inferență.



Prima alternativă

a)



A doua alternativă

b)

Figura 6 (14.3)

Imposibilitatea de a infera în maniera cunoscută ca specifică „pătratului lui Boethius", pune la îndoială posibilitatea de a ordona operatorii din prima clasă într-un astfel de pătrat logic. Spunem aceasta întrucît, în mod imediat, tocmai aceste inferențe erau criteriul care indica cu siguranță ce poziție trebuie să ocupe o funcție de adevăr anumită în cadrul pătratului logic. Întrucît, posibilitatea unor astfel de inferențe este exclusă, vom căuta totuși să construim un pătrat logic al operatorilor din prima clasă, dar bazîndu-se pe felul în care „se potrivesc" între ele valorile de adevăr definitorii pentru acești operatori.

Vom putea constata că operatorii din prima clasă ne permit, în baza criteriului folosit, să construim cu ajutorul lor, nu un singur pătrat logic, ci cel puțin două — figura (14.3) — fără însă a dispune de un criteriu care să ne oblige a accepta numai una dintre variante.

Analiza cît de sumară a celor două alternative pentru operatorii din prima clasă pune în evidență necesitatea de a le respinge. Motivul este simplu: cele două scheme se contrazic. Astfel, nu putem accepta simultan că între *Opq* și *Jpq* avem un raport de contrarietate (conform primei alternative) și că între aceiași operatori avem și un raport de subalternare (conform celei de a doua alternative). La fel, nu putem accepta faptul că, în baza primei alternative, între *Epq* și *Vpq* există

un raport de subcontrarietate, dar în același timp, tot între *Epq* și *Vpq*, există un raport de subalternare, așa cum rezultă prin cea de a doua alternativă. Considerăm că cele de pînă acum sînt suficiente cel puțin pentru a respinge acceptarea ambelor alternative.

Să vedem dacă e posibil a accepta numai una dintre alternative, prima să spunem. Fără îndoială că între *Opq* și *Vpq* este un raport ca de la afirmație la negație. Dar în relația dintre *Opq* și *Vpq* nu putem constata posibilitatea unor inferențe proprii raportului de contradicție dintre judecățile de predicație. Deci, dacă avem aici o relație ce poate fi redată printr-o disjuncție exclusivă, asemănător raportului de contradicție dintre judecățile de predicație, ea nu este totuși aceeași cu raportul de contradicție propriu pătratului logic. O situație similară va rezulta și pentru pretinsele raporturi de contrarietate dintre *Opq* și *Jpq*, sau de subcontrarietate dintre *Epq* și *Vpq*. Dar dacă situația acestor trei raporturi de opoziție ar putea să ne mai pună încă la îndoială în a respinge posibilitatea unui pătrat logic al operatorilor din prima clasă, luarea în considerație a pretinsului raport de subalternare face această respingere indubitabilă. Motivul este simplu: acest tip de raport nici nu există între operatorii din prima clasă.

Noi nu negăm însă că de la *Opq* la *Epq* poate exista o implicație. Nu respingem nici ideea că acolo unde există un raport de subalternare, există și o implicație de la supraaltern ca antecedent, la subaltern, drept consecvent, dar respingem ideea că oriunde este o implicație este și un raport de subalternare. În cazul primei alternative din figura (14.3) avem tocmai un astfel de exemplu. De la *Opq* la *Epq* avem o implicație, dar nu avem un raport de subalternare. La fel, se poate spune că între *Opq* și *Vpq* există o disjuncție exclusivă, dar nu există un raport de contradicție specific pătratului logic; între *Opq* și *Jpq* există o incompatibilitate, dar nu și un raport clasic de contrarietate, iar între *Epq* și *Vpq*, fără îndoială că există o disjuncție, dar nu există un raport de subcontrarietate, așa cum am constatat nu numai în pătratul logic clasic al judecăților de predicație, ci și în cele reprezentate în figurile (14.1) și (14.2). În cazul în care vom încerca să acceptăm numai cea de a doua alternativă din figura (14.3), discuția asupra ei ne va duce la aceleași concluzii ca în cazul primei alternative. Conchidem deci că pentru operatorii ce formează prima clasă

şi cărora le este caracteristică proprietatea ca, în cazul lor, dualul să se confunde cu negația operatorului supus operației de dualizare, nu este posibilă alcătuirea unui pătrat logic care să se bucure de aceleaşi proprietăți ca şi pătratele logice anterioare. O primă motivație a acestei situații constă în aceea că între operatorii considerați acum nu sînt posibile inferențe de natura celor specifice pătratului logic.

Vom încerca acum să ne referim la ultimul grup de patru operatori, cei care formează cea de a treia clasă şi în plus sînt cunoscuți sub numele de auto-duali. Nu este cazul să insistăm prea mult asupra relațiilor dintre aceşti operatori pentru a ne da seama că între ei nu sînt posibile inferențe care să ne permită ordonarea lor într-un pătrat logic analog celui clasic, sau celor corespunzătoare grupurilor de operatori din cea de a doua clasă. Deci nu e nevoie să insistăm prea mult întrucît aici, după ce am stabilit că între *Fpq* şi *Ipq*, pe de o parte, și între *Gpq* și *Hpq*, pe de altă parte, există un raport ca de la afirmație la negație, nu vom mai putea constata nimic care, măcar să ne amintească de inferențele proprii pătratului logic. În consecință, putem declara că operatorilor auto-duali nu le este proprie o schemă logică analoagă pătratului logic clasic, adică de fapt între ei nu există acele raporturi logice care să ne permită alcătuirea unei astfel de scheme.

Reluînd, acum retrospectiv, analiza efectuată asupra raporturilor dintre operatorii binari ai *CP*, încadrați în trei clase după criteriul dualității, putem spune că numai în cadrul celei de a doua clase am putut constata, atît pentru operatorii primei sub-clase, cît și pentru cei ai celei de a doua sub-clase, existența unor astfel de raporturi care permit între ei inferențe analoage celor proprii pătratului logic al judecăților de predicație. De asemenea, făcînd abstracție de criteriul acestor raporturi și al inferențelor corespunzătoare lor, putem construi așa-zise pătrate logice și pentru alte grupuri de operatori. Dacă spargem barierele claselor alcătuite și dacă vom reduce subalternarea la o implicație, contrarietatea la o incompatibilitate, contradicția la o disjuncție exclusivă şi subcontrarietatea la o disjuncție, atunci vom putea obține un număr și mai mare de astfel de scheme logice. Dar, cu excepția celor adoptate, nici unul din aceste pătrate nu va corespunde ideii clasice de pătrat logic. Acest fapt nu ar fi de luat în considerație dacă totuşi, între aceşti operatori s-ar putea constata existența

unor astfel de raporturi care să permită trecerea de la unul la altul pe baza unor inferențe riguroase, chiar altele decît cele specifice pătratului logic clasic, dar tocmai acest lucru nu este realizabil și ca atare ne vedem obligați să reținem numai pătratele logice reprezentate în figurile (14.1) și (14.2). Alături de aceste două pătrate logice, la nivelul *CP*, mai pot fi consemnate un al treilea în care elementele ce intră în raporturi sînt membrii echivalențelor cunoscute sub numele de legile lui Augustus De Morgan și datorat lui A. N. Prior [42 p. 78] și un al patrulea, asupra căruia vom mai reveni, datorat lui R. Stoichiță [46 p. 145—162].

5. OPERATORI DUALI ARMONIC CONJUGAȚI

Este cunoscut faptul că în construcția tabelului nr. 1 a fost utilizat un procedeu combinatoriu care a realizat epuizarea tuturor posibilităților de combinare a valorilor de adevăr 1 și 0, în soluția funcțiilor de adevăr de două variabile propoziționale conectate de un operator al *CP*. Ca rezultat al aplicării acestui procedeu combinatoriu, au fost obținute exact 16 grupări diferite ale valorilor de adevăr acceptate de logica standard, fapt care conduce la ideea că operatorii *CP* asociați acestei logici sînt în număr de 16, fiecare din ei aflîndu-și definiția într-o grupare distinctă a valorilor de adevăr din tabelul nr. 1. Dar utilizarea acestui procedeu combinatoriu a condus și la o anumită ordine a celor 16 operatori, astfel încît, fiecăruia din ei îi corespunde în tabelul nr. 1 o anumită poziție desemnată printr-un număr. Pentru a indica pe oricare din cei 16 operatori ai *CP* cuprinși în tabelul nr. 1 este suficient să indicăm numărul poziției sale. Prin urmare, putem reproduce, într-un fel, tabelul nr. 1 printr-un simplu șir de cifre de la 1 la 16, în care operatorii înscriși de noi în sub-clasa (c_1) au fost înscriși într-un cerc, iar cei din sub-clasa (c_2) într-un pătrat:

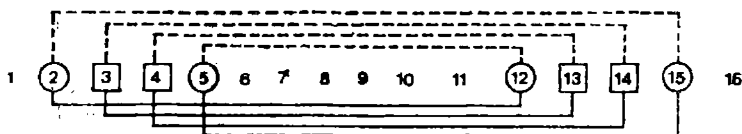


Figura 7 (15.1)

În continuarea discuției de mai sus, precizăm că, în figura (15.1) linia continuă leagă între ei dualii, iar linia punctată leagă între ele negațiile. Presupunem că fiecare din cifrele de la 1 la 16, incluse de șirul din figura (15.1), are o dublă semnificație. Pe de o parte, fiecare membru al acestui șir reprezintă, așa cum s-a stabilit, un anumit operator binar al *CP*, iar pe de altă parte, fiecare număr din acest șir reprezintă un punct pe o dreaptă. Pornind de la această a doua semnificație a membrilor ce formează șirul din figura (15.1), vom putea spune că numerele de la 1 la 16 inclusiv reprezintă, într-o terminologie geometrică, puncte colineare pe segmentul de dreaptă delimitat de punctele 1 și 16. Observăm că în șirul de la 1 la 16 negațiile operatorilor considerați sînt simetric ordonate. Dacă luăm separat operatorii incluși anterior în sub-clasa (c_1) și dacă privind cifrele care îi desemnează drept puncte colineare pe o dreaptă și în plus, dacă ordonarea lor simetrică unul față de altul în figura (15.1), nu o privim din perspectiva negației sau a dualității, ci ca un efect al unei proiecții, atunci, folosind un alt termen familiar geometriei proiective, am putea spune despre ei că sînt armonic conjugați. În același context, același lucru se poate spune și despre operatorii care formează subclasa (c_2).

Interpretarea pe care am dat-o mai sus operatorilor conjuncție, disjuncție, incompatibilitate și „nici ... nici ..." pe de o parte, și operatorilor implicație materială inversă, implicație materială, negația implicației materiale inverse și negația implicației materiale, pe de altă parte, a fost posibilă, fără îndoială și datorită ordinei în care operatorii considerați apar în figura (15.1) și în tabelul nr. 1. Dat fiind însă că pentru operatorii din cea de a doua clasă, dualul este distinct atît față de negație, cît și față de afirmația operatorului supus dualizării, oricare ar fi procedeul combinatoriu de construcție a tabelului celor 16 operatori ai *CP*, acești operatori vor ocupa totdeauna poziții distincte în cadrul tabelului, chiar dacă ordinea în care vor fi așezați ar crea dificultăți în a reproduce interpretarea cu sonoritate geometrică de mai sus. De fapt, ne-am folosit de această interpretare doar cu scopul de a sublinia că operatorii discutați aici, ocupă poziții distincte în lista operatorilor *CP* și că dacă, în construcția acestei liste, ordinea operatorilor este stabilită, cel puțin, în funcție de negație, atunci va fi evident că operatorii ce formează a doua

clasă, din perspectiva negației și a dualității, sînt *armonic conjugați*. Dar tocmai în acest sens, această proprietate a operatorilor din cea de a doua clasă, de a fi, în conformitate cu sub-clasele din care ei fac parte, *armonic conjugați*, o primim pentru moment ca pe o simplă curiozitate.

S-ar putea crede că am remarcat această proprietate numai datorită rezonanței ei geometrice, așa cum dualitatea însăși, ca relație de corespondență de un tip special, presupune un fel de *simetrie*, alt termen de rezonanță geometrică. Dar nu numai rezonanța geometrică a numelui de mai sus ne-a făcut să-l utilizăm pentru a desemna o proprietate logică, ci și faptul că acea proprietate logică la care raportăm acest nume, este, printr-un punct comun — dualitatea — extrem de asemănătoare cu ceea ce numele „armonic conjugat" desemnează în cadrul geometriei proiective. Începînd de aici vom încerca să-i oferim numelui „armonic conjugat" un conținut logic.

Astfel, dacă proprietatea după care *dualul negației unei funcții de adevăr este echivalent cu negația dualului aceleiași funcții de adevăr*, proprietate pe care, în paragrafele anterioare am indicat-o numai prin niște exemple de operatori din cea de a doua clasă, poate fi extinsă asupra tuturor operatorilor *CP*, așa cum vom dovedi în paragrafele următoare, proprietatea după care *un operator este distinct atît față de dualul său, cît și față de negația sa*, aparține în mod exclusiv numai operatorilor incluși în cea de a doua clasă. Această ultimă proprietate convenim să o numim prin termenul „armonic conjugat".

Cu scopul de a oferi o cît mai clară explicație a sensului cu care dorim să utilizăm acest termen, reamintim că am constatat — în ceea ce privește cei 16 operatori ai *CP* pe care ni-i prezintă tabelul nr. 1 — că numai pentru 8 dintre ei, împărțiți în două grupe de cîte patru, putem aserta, în cadrul fiecărui grup, existența unor astfel de raporturi ce pot fi reprezentate printr-un pătrat logic analog celui de tip clasic. Dacă comparăm fiecare din aceste sub-clase de cîte patru operatori, cu celelalte clase de operatori, respectiv, prima și cea de a treia clasă, ambele fiind constituite tot din patru operatori, vom constata că ceea ce îi distinge pe primii opt de restul operatorilor este faptul că în cazul lor, fiecare operator este distinct, atît față de dualul său, cît și față de negația sa. Altfel spus, fiind dat oricare dintre acești operatori, el presupune, e un fel de

a spune, trei forme distincte: *operatorul dat*, *dualul operatorului dat* și *negația operatorului dat*. În plus, fiecăruia dintre acești operatori îi revine și calitatea, e adevărat mai generală, după care, dualul negației sale este echivalent cu negația dualului său.

Dacă luăm împreună cele două proprietăți la care ne-am referit imediat mai sus și dacă pornim de la un operator oarecare din a doua clasă, stadiul inițial (operatorul ales) numindu-l faza *a*, vom putea constata în total patru faze distincte de raportare a operatorului inițial, în conformitate cu cele două proprietăți. Prima fază o constituie raportarea operatorului ales la el însuși și o numim faza *a*. A doua treaptă este raportarea operatorului dat la negația sa, faza *b*. Al treilea etaj este raportarea operatorului dat la dualul său, faza *c*. În sfîrșit, operatorul ales se mai poate raporta la negația dualului său, sau la dualul negației sale, care, fiind situații echivalente, pot fi redate ambele drept faza *d*. Dacă operatorul inițial este un astfel de operator care se bucură de prima proprietate, adică dualul operatorului dat este distinct atît față de negația operatorului dat, cît și față de operatorul dat însuși, atunci pentru fiecare din fazele *a*, *b*, *c*, și *d* avem un operator distinct la care se raportează operatorul dat. Vom avea, în consecință, patru operatori care formează un grup de sine stătător, după criteriul dualității. Grupul este astfel constituit încît, oricare ar fi operatorul ales dintre cei patru, el își găsește printre ceilalți trei, în mod distinct, un operator care poate fi definit drept negația sa, un altul care poate fi definit drept dualul său și, în sfîrșit, un altul care poate fi definit fie drept negația dualului său, fie drept dualul negației sale. Anterior, ne-am referit la astfel de operatori — cei ce formează subclasele celei de a doua clase sînt exemple de astfel de grupuri — dar am privit corelația lor numai sub aspectul modului în care ei sînt ordonați în tabelul celor 16 operatori binari ai *CP* și întrucît am constatat atunci un anumit aspect particular privind această ordine a lor, am delimitat acest aspect printr-un termen împrumutat de la geometria proiectivă spunînd despre ei că sînt *armonic conjugați*. În măsura în care atunci acest nume nu primise încă o semnificație logică, am semnalat proprietatea amintită doar sub titlul de curiozitate. Credem că acum putem să oferim acestui nume împrumutat din geometrie o semnificație logică, majoră din punctul de vedere

al dualității. În acest sens, ***dacă avem un grup de patru operatori distincți astfel încît oricare ar fi operatorul ales din cei patru, între ceilalți trei noi putem găsi negația primului, dualul primului și negația dualului sau dualul negației primului, atunci vom spune că cei patru operatori considerați inițial se bucură de proprietatea de a fi armonic conjugați.***

Din analiza celor 16 operatori binari ai *CP* a rezultat că numai opt, luați în grupuri de cîte patru, se bucură de proprietatea de a fi armonic conjugați. Este vorba de operatorii care formează sub-clasa (c_1) și de cei care formează sub-clasa (c_2). În plus, ca o concluzie a celor discutate pînă acum, vom spune că, dacă și numai dacă patru operatori distincți se bucură de proprietatea de a fi armonic conjugați, atunci între ei există astfel de raporturi care fac posibilă ordonarea lor într-un pătrat logic coerent.* Putem chiar preciza că cei patru operatori armonic conjugați, vor fi așezați în pătratul logic, corespunzător lor, într-un anume fel. Astfel, între operatorul ales ca punct de plecare și negația sa există un raport de contradicție și deci trebuie așezați pe una din diagonalele pătratului. Între operatorul dat și cel definit drept dualul său există un raport de subalternare și deci ei urmează să fie așezați pe una din laturile verticale ale pătratului. În sfîrșit, ne-a rămas un al treilea operator, dar acesta nu poate fi luat drept un criteriu sigur pentru a stabili cu precizie, pe baza lui, ce poziție va ocupa în pătratul logic fiecare din cei patru operatori armonic conjugați. Pe de o parte, acest ultim operator are un caracter dublu: el este în același timp, depinde de calea ce e urmată spre el, și dualul negației și negația dualului primului operator. Pe de altă parte, dacă începem această a doua parte a analizei chiar de la acest ultim operator, vom putea descoperi doar două lucruri. Primul, vom descoperi în el contradictoriul dualului primului operator și, pe această bază, vom determina că el trebuie așezat, împreună cu dualul primului operator pe cealaltă diagonală a pătratului. Al doilea, vom putea stabili că el se află în raport de dualitate cu operatorul aflat în raport de contradicție cu primul operator și de aici vom putea

* Prin expresia „pătrat logic coerent" sau „pătrat logic consistent' înțelegem o schemă în care funcționează perfect toate inferențele proprii raporturilor de subalternare, contrarietate, contradicție și subcontrarietate.

conchide că el se află în raport de subalternare cu operatorul definit inițial drept negația operatorului dat și deci trebuie așezat, împreună cu acest operator, pe cealaltă latură verticală a pătratului. Dar nu am putut desprinde din cele de pînă acum, între ce operatori vom avea raport de contrarietate și între ce operatori vom avea raport de subcontrarietate. Pentru a clarifica această ultimă chestiune, facem apel la una din perechile de operatori între care există un raport de dualitate și testăm în ce ordine trebuie așezați pentru a forma o implicație validă. Antecedentul acestei implicații va fi supraalternul, iar consecventul va fi subalternul raportului de subalternare ales. Evident, alegînd implicația drept un criteriu pentru a stabili sensul unuia din raporturile de subalternare nu am comis nici o eroare căci nu existența, ci numai sensul raportului de subalternare a fost stabilit folosind drept criteriu implicația. Dar dacă a fost stabilit sensul unuia dintre raporturile de subalternare, cunoscînd între ce operatori există raport de contradicție și între care operatori există celălalt raport de subalternare, locul ocupat în cadrul pătratului logic corespunzător lor, de cei patru operatori armonic conjugați, poate fi indicat acum cu precizie.

Cu scopul de a oferi un exemplu, vom lua grupul de operatori armonic conjugați înscriși în cele două tabele anterior date la numerele (2), (5), (12) și (15), adică operatorii care formează prima subclasă a celei de a doua clase. Să pornim în desfășurarea exemplului nostru cu operatorul înregistrat la numărul (2), adică *Apq* — disjuncția. În conformitate cu tabelul nr. 1, operatorul înscris la numărul (15), adică *Xpq* — operatorul „nici ... nici ...", poate fi definit drept negația primului. De aici rezultă că între *Apq* și *Xpq* există un raport de contradicție. Cei doi operatori urmează a fi așezați pe una din diagonalele pătratului logic ce va corespunde celor patru operatori armonic conjugați luați în discuție, dar nu știm care dintre ei urmează a fi așezat în partea de sus și care în partea de jos a diagonalei. Mergînd mai departe, constatăm că, în conformitate cu tabelul nr. 2, operatorul aflat la numărul (12), *Kpq*, adică conjuncția, se află în raport de dualitate cu *Apq*, disjuncția. Urmează că între *Apq* și *Kpq* există un raport de subalternare, numai că încă nu știm care din ei este supraaltern și care este subaltern. Cu ajutorul tabelelor nr. 1 și nr. 2 vom putea constata că, față de *Apq*, ultimul operator

rămas în discuție, cel înscris la numărul (5), *Dpq*, adică incompatibilitatea, poate fi definit drept dualul negației sale, dar și drept negația dualului său. Dacă am încerca să pornim acum de la *Dpq*, am mai putea stabili că el se află în raport de contradicție cu dualul lui *Apq*, adică cu *Kpq* și în plus că, întrucît el se află în raport de dualitate cu negația lui *Apq*, adică cu operatorul „nici ... nici ...", între ei doi există un raport de subalternare. Datele obținute pînă acum sînt insuficiente însă pentru a ne arăta configurația precisă a pătratului logic corespunzător operatorilor luați în discuție. Pentru a afla soluția finală revenim la unul din raporturile de subalternare, să spunem la primul, adică la cel dintre *Apq* și *Kpq*. Dacă testăm care dintre ei poate fi antecedent și care consecvent într-o implicație validă, răspunsul nu poate fi decît unul singur: conjuncția este antecedent, iar disjuncția este consecvent. Problema pusă inițial este rezolvată: primul raport de subalternare este de la *Kpq* la *Apq*, în cadrul raportului de contradicție dintre *Apq* și *Xpq*, disjuncția va fi așezată sub conjuncție în partea de jos a diagonalei, iar *Xpq* în partea de sus a diagonalei, deci pe latura orizontală de sus a pătratului, împreună cu conjuncția, iar *Dpq*, incompatibilitatea, aflată în raport de contradicție cu conjuncția, va fi așezată în partea de jos a diagonalei încă necompletată și deci, împreună cu disjuncția, va ocupa latura orizontală de jos a pătratului. În acest sens, putem completa lista raporturilor descoperite pînă acum: raportul de contrarietate există între *Kpq* și *Xpq*, iar raportul de subcontrarietate se stabilește între *Apq* și *Dpq*. Evident, o singură chestiune ar mai rămîne de precizat. Descoperind unul sau ambele raporturi de subalternare, dacă nu dispunem de un criteriu anterior stabilit, alegerea laturii verticale din dreapta sau din stînga pentru unul sau altul din cele două raporturi, este o chestiune de preferință.

6. EXPRESII ALE LOGICII STANDARD ARMONIC CONJUGATE

Analiza de pînă acum s-a referit la cazul unor operatori ce se bucură de proprietatea de a fi armonic conjugați. În consecință, formulele luate în discuție au prezentat, din punctul de vedere al alcătuirii lor, cazul minim de complexitate: un operator și numai două variabile propoziționale. Problema

care apare acum este dacă proprietatea discutată în paragraful anterior poate fi extinsă la formule ale *CP* mai complicate. În sensul în care am vorbit despre anumiți operatori ai *CP* ca fiind armonic conjugați, vom încerca, în cele ce urmează, să vedem în ce măsură putem vorbi de astfel de formule armonic conjugate. Diferența între primul caz și cel de acum este că în locul unui grup de patru operatori distincți, discuția noastră are ca obiect patru formule mai complexe distincte. Dacă aceste patru expresii sînt armonic conjugate, adică dacă luînd una din ele, oricare ar fi ea, ca expresie de bază, putem să-i aflăm printre celelalte trei negația, dualul şi negația dualului sau dualul negației sale, atunci ele pot fi ordonate la rîndul lor într-un pătrat logic analog celor construite de noi pînă acum. Între expresiile noastre ar exista raporturi identice cu cele din pătratul logic clasic și, bineînțeles, inferențele corespunzătoare acestor raporturi.

Mai sus, citam drept un exemplu de pătrat logic, construit la nivelul *CP*, pe cel al legilor lui Augustus de Morgan. Membrii acestor echivalențe, luate ca expresii diferite, formează un grup de expresii armonic conjugate şi această proprietate a lor explică consistența pătratului logic care consemnează raporturile dintre ele. Dar, discutînd acest pătrat logic, trebuie să avem în vedere că elementele raporturilor consemnate de pătrat nu reprezintă un moment cu totul nou față de analiza noastră anterioară. Astfel, expresiile din care este alcătuită această schemă sînt: *Kpq*, *Apq*, *KNpNq* și *ANpNq*, adică, într-un fel, tot formule de minimă complexitate; numai ultimele două cuprind, în afara unuia din operatorii binari din sub-clasa (c_1) și negația, dar ele pot fi înțelese și ca traducere prin intermediul conjuncției și negației, sau al disjuncției şi negației a celorlalți doi operatori ai *CP*, care, împreună cu conjuncția și disjuncția formează sub-clasa (c_1).

O situație oarecum deosebită o reprezintă pătratul logic oferit de R. Stoichiță, în sensul că formulele ce intră în alcătuirea lui, deși au în componența lor numai operatori din cei incluși de noi în una din sub-clasele celei de a doua clase, totuși ele prezintă un mai mare grad de complexitate decît cazurile anterior discutate. Acest grad mai mare de complexitate al acestor expresii constă în aceea că cele două variabile propoziționale, *p* și *q*, care intră în componența lor, apar în mod repetat în cadrul aceleiași formule.

Un astfel de caz îl înscriem ca o primă etapă în analiza noastră. Luînd în discuție formule mai complexe ale *CP*, pentru primul caz situația cînd numai două variabile propoziționale apar în mod repetat în cadrul unei expresii, trebuie să facem, de la început, o precizare. Ca o concluzie firească a celor dobîndite pînă acum, notăm faptul că, oricît de complexe ar fi astfel de formule, expresia de bază, de la care pornim în analiza noastră, nu trebuie să fie reductibilă, în ansamblul ei, la unul din operatorii binari ai *CP* cuprinși în prima sau în cea de a treia clasă. În cazul în care o astfel de situație s-ar ivi, să spunem că formula aleasă se dovedește a fi o tautologie, posibilitatea ca, pe baza ei, în sensul precizat în paragraful anterior, să determinăm un grup de patru expresii armonic conjugate este exclusă. Nu credem că este necesar să aducem o explicație suplimentară, căci această situație se reduce, fără echivoc, la cazurile operatorilor din prima clasă sau din cea de a treia clasă, discutate anterior. În sfîrșit, în măsura în care aceste expresii nu se dovedesc a fi armonic conjugate, ele nu pot fi ordonate într-un pătrat logic consistent.

În schimb, dacă luăm în considerație patru expresii alcătuite din operatori binari ai *CP* și din numai două variabile propoziționale care apar în mod repetat în cadrul lor, dar oricare ar fi expresia aleasă din cele patru, ea nu se dovedește reductibilă la unul din operatorii incluși de noi în prima sau în cea de a treia clasă și în plus, expresia aleasă își află în celelalte trei negația, dualul și respectiv dualul negației sau negația dualului său, atunci cele patru expresii sînt armonic conjugate. Întrucît aceste patru expresii se dovedesc a fi armonic conjugate, ele pot fi ordonate într-un pătrat logic consistent și între ele vom putea constata existența raporturilor de subalternare, contrarietate, contradicție și subcontrarietate în sensul precizat în paragraful anterior. Vom lua ca exemplu următoarele patru expresii:

(16.1) *CEKpqNpq*
(16.2) *KEKpqNpNq*
(16.3) *MJApqNpq*
(16.4) *AJApqNpNq*

dintre care, dacă luăm expresia (16.1) ca punct de plecare, atunci vom constata în formula (16.2) negația sa, în formula (16.3) dualul său și în formula (16.4) dualul negației sale. Întrucît expresia (16.1) nu este reductibilă, în ansamblul ei, la nici unul din operatorii incluși de noi în prima sau în cea de a treia clasă, putem spune că formulele (16.1), (16.2), (16.3) și (16.4) sînt expresii *CP* armonic conjugate și, în plus, ele pot alcătui un pătrat logic consistent.

Credem că nu este necesar să insistăm în mod deosebit asupra pătratului logic din figura (16.1) dacă atragem atenția asupra faptului că eventuala sa analiză ne-ar dovedi analogia sa cu pătratul logic anterior prezentat în paragraful (1.4), prin figura (14.2).

Pe baza celor spuse pînă în prezent, putem încerca o întregire a analizei proprietății unor operatori și a unor formule ale logicii standard de a fi armonic conjugate. Astfel, am constatat că în cazul în care discuția noastră s-a limitat la cei 16 operatori binari ai *CP*, legătura dintre proprietatea unor operatori de a fi armonic conjugați și aceea de a forma un pătrat logic asemănător pătratului logic clasic era ușor de remarcat. Numai operatorii armonic conjugați pot da naștere unui pătrat logic consistent.

Dar, dacă am încercat să lărgim perspectiva analizei noastre la formule mai complexe, pentru moment avem în vedere numai formule de tipul celor de mai sus, nu ne-am limitat la a afirma că este suficient să constatăm existența a patru formule — o formulă de bază, negația ei, dualul ei și negația dualului sau dualul negației ei. În plus, am fost nevoiți să

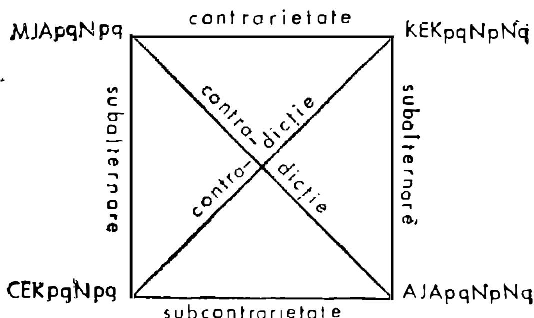


Figura 8 (16.1)

introducem o condiție suplimentară: patru astfel de formule pot fi considerate armonic conjugate și în consecință pot da naștere unui pătrat logic consistent dacă și numai dacă, oricare ar fi transformările licite aplicabile lor, ele se pot reduce, în ultimă instanță, numai la unul din operatorii binari incluși fie în prima, fie în cea de a doua sub-clasă a celei de a doua clase. Avînd în vedere această situație, considerăm necesar să ne oprim mai în amănunt asupra proprietății unor expresii de a fi armonic conjugate.

Pentru aceasta, reamintim că un operator poate fi definit ca armonic conjugat în raport cu alți trei operatori prin aceea că dualul său este distinct atît față de el însuși, cît și față de negația sa. Aceasta este suficient pentru a avea certitudinea că al patrulea operator înțeles fie ca dualul negației, fie ca negația dualului primului operator, va fi la rîndul său, distinct față de toți ceilalți trei operatori.

În acest moment credem că putem reformula proprietatea unor operatori de a fi armonic conjugați într-o perspectivă constructivă, la nivelul expresiilor logicii standard luate în discuție pînă în acest moment. Astfel, vom spune că, ***dată fiind o expresie oarecare, dacă această expresie nu este o tautologie sau o contradicție, dacă ea nu poate fi redusă, în întregul ei, pe calea definițiilor CP, la o echivalență sau la disjuncția exclusivă și dacă nu se dovedește a fi o expresie auto-duală, atunci ea poate fi luată ca punct de plecare pentru formarea unui grup de expresii armonic conjugate.*** De fapt, această idee se bazează pe o alta implicată în discuția anterioară: proprietatea unor operatori de a fi armonic conjugați poate fi extinsă la nivelul expresiilor logicii standard căci, și de această dată, ea se realizează întrutotul analog nivelului operatorilor: fiind dată o expresie oarecare, dacă dualul ei este distinct atît față de ea însăși cît și față de negația ei, atunci dualul negației sale sau negația dualului său va fi o expresie distinctă față de toate cele trei expresii considerate pînă acum. Aceasta înseamnă că cele patru expresii se bucură de proprietatea de a fi armonic conjugate.

Prin urmare, fiind dată o expresie oarecare, să o notăm cu P, dacă dualul ei, expresia Q, este distinct față de P, cît și față de negația acestei expresii, să spunem R, atunci prin ipoteză avem deja date trei expresii distincte: expresia inițială (P), dualul expresiei inițiale (Q) și negația expresiei

inițiale (*R*). Acum, dacă *Q* ar fi echivalent cu *P*, adică dacă dualul ar fi identic cu expresia inițială, atunci între *Q* și *R* ar exista același raport ca între *P* și *R*. În acest caz, după cum *R* este negația lui *P*, tot așa *R* ar fi și negația lui *Q*. În aceste condiții, negația lui *Q* (negația dualului expresiei inițiale) ar fi echivalentă cu negația lui *P*, adică ar fi echivalentă cu *R*. Putem spune deci că, dacă dualul (*Q*) unei expresii oarecare (*P*) este echivalent cu expresia al cărei dual este, atunci negația dualului expresiei inițiale ar fi echivalentă cu negația expresiei inițiale sau, altfel spus, nu ar mai fi distinct față de negația expresiei inițiale. Pentru ca acest lucru să se realizeze, este însă imperios necesar ca dualul expresiei inițiale să fie echivalent cu expresia inițială, dar noi am stabilit prin ipoteză că avînd o expresie oarecare *P* și dualul ei *Q*, cele două formule sînt diferite. Prin urmare, negația dualului expresiei inițiale — să notăm această expresie cu *S* — este distinctă față de negația expresiei inițiale *P*, adică față de *R*.

O altă variantă ar consta în aceea că dualul lui *P*, expresia *Q*, ar fi identic cu negația lui *P*, adică cu *R*. Numai sub această condiție, negația dualului expresiei inițiale (*S*) ar fi identică cu negația lui *R*. Altfel spus, asta înseamnă că negația dualului expresiei considerate inițial, adică expresia *S*, este echivalentă cu negația lui *R*, adică cu negația negației expresiei inițiale, ceea ce înseamnă că *S* este echivalent cu *P*. Prin ipoteză însă, *Q*, ca dual al lui *P*, este o expresie diferită de *R* ca negație a lui *P* și deci *S* ca negație a dualului lui *P* este distinctă față de *P*.

Am stabilit pînă acum că *S*, negația dualului expresiei *P* este distinct atît față de expresia inițială *P*, cît și față de negația acesteia, expresia *R* — evident, sub supoziția anunțată: *P* fiind o expresie oarecare, dualul ei, expresia *Q*, nu se confundă nici cu expresia inițială, nici cu negația acesteia. Pentru a completa discuția ar mai rămîne de precizat că expresia *S*, adică negația dualului lui *P*, este distinctă și față de dualul expresiei inițiale *P*, adică față de expresia *Q*. Dar această distincție este mai mult decît firească și ea este obligatorie chiar dincolo de supoziția inițială. În fond, ca negație a dualului lui *P*, expresia *S* este de fapt negație a lui *Q*, dualul expresiei *P* și indiferent de raportul dintre *Q* și *P*, expresia *Q* ca formulă bine formată (*fbf*) a logicii standard nu poate fi

gîndită ca echivalentă cu propria sa negație, întrucît o astfel de echivalență este o contradicție.

Reamintind faptul că negația dualului unei expresii este echivalentă cu dualul negației aceleiași expresii, putem considera analiza noastră încheiată. Pe baza celor discutate, putem desprinde concluzia că proprietatea unor operatori de a fi armonic conjugați poate fi extinsă și la nivelul acelor formule ale logicii standard care au făcut obiectul discuției pînă în prezent. În aceeași măsură în care am vorbit de operatori armonic conjugați, putem vorbi de astfel de expresii armonic conjugate.

Atunci însă cînd am introdus noțiunea de *expresii ale logicii standard armonic conjugate*, am făcut o precizare și anume că: patru expresii dintre care una fiind luată ca punct de plecare, putem afla în celelalte trei dualul, negația și respectiv, negația dualului sau dualul negației celei dintîi, pot fi considerate ca armonic conjugate, dacă și numai dacă, expresia inițială sau oricare din cele patru, nu este o expresie autoduală și nu poate fi redusă, în întregul ei, la o tautologie, o contradicție, la echivalență sau la disjuncție exclusivă. Această precizare nu trebuie înțeleasă ca o restricție ce grevează asupra proprietății unor expresii de a fi armonic conjugate, ci ca un mijloc de a detecta dacă patru expresii — o expresie luată ca bază, dualul ei, negația ei și negația dualului sau dualul negației ei — pot fi considerate sau nu ca armonic conjugate. Dacă întîlnim patru expresii, raportate una la alta ca mai sus, dispunem de două mijloace pentru a distinge dacă ele sînt sau nu armonic conjugate. Primul mijloc constă în a verifica dacă cele patru expresii care apar ca distincte sînt într-adevăr distincte; pentru aceasta ne putem folosi fie de procedeul matricial, fie de un procedeu formal al logicii standard, dar pentru a ne folosi de această cale este necesar ca cele patru expresii să fie date anterior și să mai știm că luînd una din ele ca punct de referință, avem în celelalte trei, dualul, negația și negația dualului sau dualul negației acesteia.

Dar dacă avem o singură expresie, evident o *fbf* a logicii standard și dorim să aflăm dacă, pornind de la ea, putem să o includem într-un grup de patru expresii armonic conjugate, atunci procedeul de mai sus nu ne oferă o cale suficient de eficientă. În aceste condiții, este mult mai convenabil să apelăm la cel de al doilea procedeu, adică să testăm, pe calea

definițiilor *CP*, a procedeului matricial sau pe calea unui procedeu formal al logicii standard, dacă expresia dată este o tautologie sau o contradicție, dacă poate fi redusă în întregul ei la o echivalență sau la disjuncția exclusivă, sau dacă este o expresie auto-duală. Presupunînd că oricare din cele cinci alternative se dovedește exclusă, avem certitudinea că expresia dată poate fi luată ca punct de pornire pentru a construi un grup de patru expresii armonic conjugate, între care, cu siguranță, vor putea fi descoperite inferențe proprii pătratului logic clasic al judecăților de predicație. Evident că, problema construirii, pornind de la o *fbf* a logicii standard, a dualului ei, a negației ei și a negației dualului sau a dualului negației ei nu este o problemă dificilă dacă facem apel la tabelele nr. 1 și nr. 2 sau la definiția dualității și la teorema negației anterior enunțate.

Pentru a dobîndi aceste certitudini, testul inițial este indispensabil, nefiind suficient a ne mulțumi cu o simplă inspecție vizuală a expresiei de la care pornim. Dacă avem date patru expresii, ele pot fi deosebite numai în semnificație, dar pot să aibă o formă de exprimare asemănătoare sau pot să difere și sub aspectul formei de exprimare. Pentru a explica ce înțelegem prin „formă de exprimare asemănătoare", precizăm că două expresii deosebite prin înțelesul lor, dacă sînt construite cu același operator principal pot fi numite ca avînd o „formă de exprimare asemănătoare". Să luăm un exemplu. În conformitate cu legile lui Augustus De Morgan, disjuncția *Apq* poate fi redată și sub forma *NKNpNq* — care reprezintă traducerea primei formule în termenii conjuncției și negației. Luînd ca punct de plecare formula *Kpq*, considerăm această formulă ca deosebită atît prin înțelesul ei, cît și prin forma ei de exprimare față de formula *Apq*, cunoscută și sub numele de dualul celei dintîi. Acum, dacă comparăm între ele formulele *Kpq* și *NKNpNq*, despre acestea din urmă vom spune că sînt diferite ca înțeles, dar sînt asemănătoare ca formă de exprimare, iar dacă vom compara *Apq* cu *NKNpNq*, vom spune despre ele că sînt asemănătoare ca înțeles, dar diferite ca formă de exprimare.

În contextul discuției noastre ne interesează cazul în care avem formule diferite ca înțeles, dar cu o formă asemănătoare de exprimare. În conformitate cu cele enunțate anterior (paragraful 1.2), dispunem de două procedee de a construi dualul

unei expresii oarecare. O primă cale: aplicăm negația asupra fiecărei variabile propoziționale și simultan asupra expresiei ca întreg; a doua cale ar consta în aceea că, folosind tabelul nr. 2, înlocuim în expresia dată operatorii ei cu dualii lor. Dacă adoptăm prima cale de construire a dualului expresiei *P*, atunci *P* și *Q* (dualul lui *P*) vor fi două expresii diferite ca înțeles dar asemănătoare ca formă de exprimare.

La fel, pentru a construi negația expresiei *P*, dispunem de cel puțin două căi. Putem adopta prima cale, adică putem aplica o negație asupra expresiei *P* ca întreg, sau cea de a doua cale, folosind tabelul nr. 1, în expresia *P* înlocuim toți operatorii cu ajutorul cărora este constituită, cu cei aflați în raport de negație cu aceștia. Dacă și aici adoptăm prima procedură, atunci expresiile *P* și *R* (negația lui *P*) vor fi diferite ca înțeles, dar asemănătoare ca formă de exprimare.

Evident, în construirea expresiei *S* dispunem de asemenea de procedee diferite. Să presupunem însă că și în acest caz am ales o astfel de cale, încît, în final, avem patru expresii — *P*, *Q*, *R* și *S* — diferite ca înțeles, dar asemănătoare ca formă de exprimare, pentru că toate păstrează, ca operatori binari, operatorii binari ai expresiei *P*. În acest caz, dacă *P* este expresia inițială și dacă operatorul ei este „Φ"*, atunci vom spune că *Q* este definiția prin intermediul lui „Φ" și a negației a dualului lui *P*, că *R* este definiția negației lui *P* prin intermediul lui „Φ" și a negației și că *S* este definiția dualului negației lui *P*, sau a negației dualului lui *P* — depinde de unde s-a pornit în construcția lui *S* — prin intermediul acelorași operatori. Desigur că trecerea, în fiecare caz în parte, de la formula mai sus caracterizată la o formulă care să difere față de *P* nu numai ca înțeles, dar și ca formă de exprimare, nu constituie o problemă. O situație analoagă ar rezulta dacă în loc de *P*, formula dată inițial ar fi fost *Q*, *R* sau *S*. În consecință, oricare ar fi expresia dată, dacă ea a rezistat testului inițial, ea este o expresie armonic conjugată cu alte trei expresii și în plus, ea ne oferă posibilitatea ca, prin operatorii ei binari și prin intermediul negației să definim toate celelalte expresii armonic conjugate cu ea.

* Întrucît faptul este lipsit de semnificație în contextul discuției de aici, simbolul „Φ" poate fi considerat ca desemnînd toți operatorii binari ai expresiei *P*, dacă aceasta conține mai mult decît unul.

Posibilitatea de a reda prin intermediul operatorilor binari ai unei expresii oarecare și cu ajutorul operatorului monar al negației, a dualului, a negației și a dualului negației sau a negației dualului acestei expresii, nu este legată de proprietatea unor formule de a fi armonic conjugate și în consecință, nu poate servi ca un criteriu pentru a detecta, cu ajutorul ei, dacă expresia inițială poate fi socotită ca armonic conjugată sau nu. În schimb, dacă revenim, din acest punct de vedere, la operatorii armonic conjugați, vom putea constata un fapt interesant. Astfel, un operator armonic conjugat este capabil, ajutat de negație, să transcrie cel puțin pe toți ceilalți operatori armonic conjugați cu el. Dar, dacă testăm posibilitățile operatorilor armonic conjugați de a transcrie și alți operatori ai *CP*, ajungem la concluzia că aserțiunea anterioară poate fi generalizată: *dacă un operator oarecare se dovedește a fi armonic conjugat cu alți trei operatori, atunci, cu ajutorul negației, el poate defini orice alt operator al CP**. Susținînd această idee, susținem și complementara ei: dacă un operator se dovedește a nu poseda proprietatea de a fi armonic conjugat cu alți trei operatori — cazul operatorilor din clasele I și III — atunci el nu are posibilitatea, ajutat de negație sau nu, să transcrie pe toți ceilalți operatori ai *CP*. Deci, dacă ne referim la operatori și nu la expresii ale logicii standard, atunci putem spune că, posibilitatea unui operator, ajutat de negație sau nu, de a transcrie pe toți ceilalți operatori ai *CP* constituie un criteriu pentru a ști dacă respectivul operator este armonic conjugat cu alți trei operatori, după cum proprietatea unor operatori de a fi armonic conjugați este un criteriu pentru a ști că acești operatori, fie prin ei înșiși numai, fie cu ajutorul negației, pot transcrie pe toți ceilalți operatori ai *CP*.

În cadrul discuției noastre despre expresii ale logicii standard armonic conjugate, revenirea la nivelul operatorilor, în sensul de mai sus, a fost impusă de necesitatea de a aduce un nou element în clarificarea statutului unor expresii armonic conjugate. Astfel, tocmai datorită faptului că un operator armonic conjugat poate transcrie, prin el însuși sau ajutat

* Un caz cu totul aparte îl prezintă doi operatori binari — incompatibilitatea și operatorul „nici ... nici ..." — care pot transcrie pe toți ceilalți operatori ai *CP*, inclusiv negația, numai prin ei înșiși, dar această chestiune nu este legată de contextul discuției noastre de aici.

de negație, pe toți ceilalți operatori ai *CP*, există posibilitatea ca o expresie a logicii standard de complexitate medie — în cadrul ei intervin, în mod repetat, numai două variabile propoziționale — să cuprindă numai unul sau mai mulți operatori armonic conjugați, dar în ansamblul ei, ea să reprezinte tocmai traducerea prin intermediul respectivilor operatori și a negației a unui alt operator al *CP*, care nu se bucură de proprietatea de a fi armonic conjugat cu alți trei operatori. Să luăm un exemplu, folosind de această dată sistemul de scriere clasic, cu paranteze. Astfel, fiind dată formula

(16.5) $(\bar{A} v B).(A v \bar{B})$

care, este alcătuită exclusiv, în forma în care ea apare aici și din punctul de vedere al operatorilor binari pe care îi conține, din conjuncție și disjuncție, adică din doi operatori care fac parte din același grup de operatori armonic conjugați, nu trebuie oferită o probă specială pentru a conchide că ea reprezintă traducerea, prin intermediul conjuncției, disjuncției și negației, a echivalenței. Dacă am face totuși abstracție de acest lucru și dacă am privi formula (16.5) doar ca o conjuncție de disjuncții, am fi tentați să credem că putem să-i construim, pe baza procedeelor cunoscute, celelalte trei expresii cu care ea este armonic conjugată. Iată aceste formule:

(16.6) $(\bar{A} \cdot B) v (A \cdot \bar{B})$ = dualul formulei (16.5)

(16.7) $- [(\bar{A} v B) \cdot (A v \bar{B})]$ = negația formulei (16.5)

(16.8) $- [(\bar{A} \cdot B) v (A \cdot \bar{B})]$ = negația dualului formulei (16.5)

Într-un fel diferite ca alcătuire, cele patru formule ar putea fi considerate ca fiind armonic conjugate. Această concluzie se bazează însă pe o simplă aparență, pe forma de exprimare a acestor formule și nu pe înțelesul lor, și ca atare o astfel de concluzie ar fi falsă.

Am stabilit încă de la început că, prin sensul ei, formula (16.5) desemnează echivalența. Ea poate fi redusă, pe calea unor transformări corecte (definițiile *CP*), la un operator binar din prima clasă și este știut că nici unul din operatorii care formează această clasă, nu se bucură de proprietatea de a fi armonic conjugat cu alți trei operatori. De altfel, nu va fi greu de observat că formula (16.6), dualul formulei (16.5) reprezintă disjuncția exclusivă. Avînd în vedere faptul că formula inițială reprezenta echivalența și revenind la considerațiile ante-

rioare în legătură cu tabelele 1 şi 2, concluzia de mai sus, la care ne conduc definiţiile *CP* nu este deloc surprinzătoare.

În continuare, dacă luăm în consideraţie formula (16.7), adică negaţia formulei (16.5) şi, dacă, în baza legilor lui A. De Morgan căutăm să aducem negaţia din faţa formulei (16.7) pe literele individuale ce alcătuiesc această expresie, vom obţine o nouă formulă:

$$(16.9)\ (A\cdot\overline{B})\vee(\overline{A}\cdot B)$$

care, conform teoremei negaţiei dată de B. Mates reprezintă tot negaţia formulei (16.5) şi se identifică cu formula (16.6), adică cu dualul formulei (16.5); diferenţa dintre formula (16.6) şi formula (16.9) poate fi anulată printr-o simplă comutativitate a disjuncţiei. Mai precis, prin intermediul formulei (16.9) se dovedeşte că formula (16.7) semnifică tot disjuncţia exclusivă, la fel ca şi formula (16.6). De fapt, acest lucru era şi firesc, dacă ţinem seamă de faptul că formula (16.5) semnifică echivalenţa. Mai departe, dacă încercăm asupra formulei (16.8) aceleaşi transformări pe care le-am operat asupra formulei (16.7), vom obţine expresia:

$$(16.10)\ (A\vee\overline{B})\cdot(\overline{A}\vee B)$$

a cărei diferenţă faţă de formula (16.5) poate fi anulată printr-o simplă comutativitate a conjuncţiei. Şi acest lucru este firesc dacă ţinem seamă de faptul că dualul formulei (16.5) este echivalent cu negaţia aceleiaşi formule. În consecinţă, dualul negaţiei, sau negaţia dualului, formulei (16.5) este acelaşi lucru cu negaţia negaţiei formulei (16.5), deci este echivalent cu formula (16.5). Concluzia care se desprinde din analiza de mai sus este că formulele (16.5), (16.6), (16.7) şi (16.8) nu sînt de fapt, distincte una faţă de alta, în sensul în care această distincţie este cerută pentru ca cele patru formule să poată fi considerate ca armonic conjugate. Întrucît aceste patru formule nu se bucură de proprietatea de a fi armonic conjugate, ele nu pot fi ordonate într-un pătrat logic consistent. Acest exemplu încheie discuţia despre acele expresii ale *CP* care conţin numai două variabile propoziţionale distincte.

Vom lua acum în consideraţie expresii ale *CP* care conţin mai mult de două variabile propoziţionale distincte. Întrucît concluziile analizei nu vor fi cu nimic afectate, discuţia se va limita la cazul formulelor *CP* alcătuite din trei variabile pro-

poziționale distincte. Să luăm și de această dată un exemplu:

(16.11) $\overline{A}vBvC\cdot Av\overline{B}vC\cdot \overline{A}vBv\overline{C}$

Pornind de la această formulă și procedînd ca și în cazul formulei (16.5), obținem următoarele trei expresii:

(16.12) $\overline{A}\cdot B\cdot CvA\cdot \overline{B}\cdot Cv\overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}$ = dualul formulei (16.11)

(16.13) $A\cdot \overline{B}\cdot \overline{C}v\overline{A}\cdot B\ \overline{C}vA\cdot \overline{B}\cdot C$ = negația formulei (16.11)

(16.14) $Av\overline{B}v\overline{C}\cdot \overline{A}vBv\overline{C}\cdot Av\overline{B}vC$ = negația dualului formulei (16.11).

Formulele (16.11) și (16.14) apar ca forme normale conjunctive, iar formulele (16.12) și (16.13) ca forme normale disjunctive. Dacă în cazul anterior a fost posibil să punem în evidență destul de ușor criteriul în baza căruia, patru expresii ale *CP*, pot fi considerate sau nu ca armonic conjugate și în consecință să conchidem dacă ele sînt capabile să alcătuiască un pătrat logic consistent, de această dată lucrurile apar a fi puțin mai complicate. Cînd spunem aceasta, ne gîndim în primul rînd la faptul că, pentru expresiile care conțin numai două variabile propoziționale, există o cale destul de simplă pentru a arăta dacă ele diferă sub aspectul semnificației lor și deci dacă pot fi considerate ca armonic conjugate. Pentru noua situație, pe care o discutăm acum, vom constata anumite deosebiri. În acest sens, remarcăm, în primă instanță, că, luate două cîte două — formula (16.11) cu formula (16.14) și formula (16.12) cu formula (16.13) — ele sînt asemănătoare sub aspectul unor constituenți, dar diferă sub aspectul altora.

Pentru a ușura discuția, ne propunem ca, folosindu-ne de anumite teoreme și definiții cunoscute ale *CP*, să operăm anumite transformări asupra acestor formule. Vom începe cu formula (16.11) pe care, cu ajutorul asociativității conjuncției, o putem aduce la forma:

(16.15) $(\overline{A}vBvC\cdot Av\overline{B}vC)\cdot \overline{A}vBv\overline{C}$

Avînd în vedere faptul că cei doi constituenți ai formulei (16.15), asociați în cadrul parantezelor, se aseamănă prin anumite elemente, putem retranscrie formula (16.15) prin:

(16.16) $[Cv(\overline{A}vB\cdot Av\overline{B})]\cdot \overline{A}vBv\overline{C}$

Aplicînd, în continuare, transformări inverse celor implicate de procedeul de reducere a unei expresii oarecare a *CP* la formă normală, obținem:

(16.17) $[C\text{v}(A \equiv B)] \cdot \overline{A}\text{v}B\text{v}\overline{C}$

Este ușor de observat acum că, din cei trei operatori binari pe care îi conține formula (16.17), unul, și anume, echivalența, nu se bucură de proprietatea de a fi armonic conjugat cu alți trei operatori ai *CP*. Dar faptul că formula (16.17) conține un astfel de operator este o dovadă că el există, ca o parte a semnificației sale, prin intermediul unora din constituenții săi, în expresia inițială (16.11). În plus, orice transformări, corect efectuate, am aplica formulei (16.11), este imposibil să eliminăm din alcătuirea ei acei constituienți prin intermediul cărora o parte din semnificația expresiei inițiale coincide cu un operator care nu se bucură de proprietatea de a fi armonic conjugat. Dar acest fapt afectează posibilitatea ca formula (16.11) să se bucure în mod deplin de proprietatea de a fi armonic conjugată cu celelalte trei expresii — negația ei, dualul ei și negația dualului sau dualul negației ei. Formula (16.17) este echivalentă cu formula (16.11), iar singura deosebire dintre ele este aceea că acolo unde formula (16.17) conține echivalența în mod explicit, formula (16.11) exprimă echivalența în limbajul conjuncției, disjuncției și negației.

Pentru a elimina posibilitatea unor îndoieli privind faptul că expresiile considerate nu se bucură de proprietatea de a fi absolut distincte și în consecință nu se poate spune despre ele că sînt armonic conjugate, vom încerca să procedăm analog și cu celelalte formule aflate în relațiile de dualitate, negație și negație a dualului față de formula (16.11). Astfel, din formula (16.12) obținem:

(16.18) $[C \cdot (A\text{w}B)\text{v}\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C},$

din formula (16.13) obținem:

(16.19) $[\overline{C} \cdot (A\text{w}B)]\text{v}A \cdot \overline{B} \cdot C.,$

iar din formula (16.14) rezultă:

(16.20) $[\overline{C}\text{v}(A \equiv B)] \cdot A\text{v}\overline{B}\text{v}C.$

Avem în vedere că fiecare dintre aceste ultime formule este echivalentă cu formula inițială din care ea a fost derivată și, în consecință, orice aserțiune făcută despre aceste formule

și despre relațiile dintre ele are deplină valabilitate cu privire la grupul de formule (16.11) — (16.14) și cu privire la relațiile dintre ele. Reciproca este de asemenea valabilă. Singura deosebire de care vom ține seamă între aceste grupuri de formule este aceea că acolo unde formulele (16.17) — (16.20) conțin în mod explicit echivalența sau disjuncția exclusivă, membrii, corespunzători lor, din grupul (16.11) — (16.14) exprimă acești operatori în limbajul conjuncției, disjuncției și negației.

Dacă vom compara între ele formulele (16.18) și (16.19), din punctul de vedere al relațiilor lor cu formula (16.17), vom constata că deși formula (16.18) este duala formulei (16.17), iar formula (16.19) este negația acestei formule, totuși expresiile comparate de noi nu diferă în mod complet una față de cealaltă. Dacă modul în care negația este distribuită față de conjuncție și disjuncție în cele două formule, ne permite să le deosebim, în ceea ce privește primul lor constituient, disjuncția exclusivă dintre *A* și *B*, ele sînt indistincte. Acest grad de indistincție între formulele comparate ține de faptul că, formula inițială, care a fost punct de plecare în obținerea lor, conține echivalența dintre *A* și *B*, așa cum s-a mai arătat — nu e nevoie să mai insistăm acum — dualul echivalenței este identic cu negația echivalenței. La aceeași concluzie vom ajunge și prin compararea formulelor (16.17) și (16.20), numai că de această dată indistincția dintre ele ține de aceea că ambele conțin echivalența dintre A și B, iar motivul pentru care, ultima expresie, deși negație a dualului celei dintîi, conține aceeași echivalență cu formula cu care este comparată a fost indicat anterior și nu e nevoie a-l mai repeta.

Important pentru noi este faptul că, gradul de indistincție care există între formulele (16.17), (16.18), (16.19) și (16.20), propriu și formulelor (16.11), (16.12), (16.13) și (16.14), face ca aceste ultime formule, deși cea de a doua a fost obținută ca dualul celei dintîi, a treia ca negație a ei, iar cea de a patra ca negație a dualului ei, să nu se bucure de proprietatea de a fi expresii armonic conjugate. În cazul anterior, am putut vorbi de formule armonic conjugate — expresiile (16.1), (16.2), (16.3) și (16.4) — deși în alcătuirea lor interveneau și operatori ca echivalența sau disjuncția exclusivă, dar, în acel caz, prezența acestor operatori în cadrul formulelor discutate era lipsită de importanță pentru proprietatea lor de a

fi armonic conjugate, întrucît, fiecare expresie, în întregul ei, s-a dovedit reductibilă la un operator binar armonic conjugat. În cazul însă în care, în discuția noastră au intervenit expresii în alcătuirea cărora intră mai mult de trei variabile proporționale distincte, posibilitatea de a reduce o astfel de expresie, în întregul ei, la un singur operator binar al *CP* este principial exclusă, avînd în vedere modul în care acești operatori au fost definiți (vezi tabelul nr. 1). În consecință, din exemplul discutat, extragem ideea că nu e posibil a vorbi de expresii, de mai mult de două variabile propoziționale, ca fiind armonic conjugate, dacă ele conțin, în mod explicit sau implicit, printr-o parte din constituienții lor, un operator din prima sau din cea de a treia clasă și dacă acea parte a constituienților ei care exprimă un astfel de operator nu poate fi eliminată fără a altera însă valoarea de adevăr a expresiei ca întreg.

Pentru a întregi discuția de mai sus să ne oprim atenția asupra unei alte expresii, și anume:

(16.21) $A \text{v} B \text{v} C \cdot A \text{v} \bar{B} \text{v} C \cdot \bar{A} \text{v} B \text{v} C \cdot \bar{A} \text{v} \bar{B} \text{v} C \cdot \bar{A} \text{v} B \text{v} \bar{C}$

Din formula (16.21), pe căile obișnuite, putem obține:

(16.22) $ABC \text{v} A\bar{B}C \text{v} \bar{A}BC \text{v} \bar{A}\bar{B}C \text{v} \bar{A}B\bar{C}$ = dualul formulei (16.21)

(16.23) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \text{v} A\bar{B}\bar{C} \text{v} A\bar{B}\bar{C} \text{v} AB\bar{C} \text{v} A\bar{B}C$ = negația formulei (16.21).

(16.24) $\bar{A} \text{v} \bar{B} \text{v} \bar{C} \cdot \bar{A} \text{v} B \text{v} \bar{C} \cdot A \text{v} \bar{B} \text{v} \bar{C} \cdot A \text{v} B \text{v} \bar{C} \cdot A \text{v} \bar{B} \text{v} C$ = negația dualului formulei (16.21).

Ca și în cazul anterior, formulele considerate acum au aspectul unor forme normale conjunctive sau disjunctive și o eventuală comparație între ele ne va arăta că, la rîndul lor, ele conțin unele elemente comune. Astfel, formulele (16.21) și (16.24) au în comun doi constituienți — $A \text{v} \bar{B} \text{v} C$ și $\bar{A} \text{v} B \text{v} \bar{C}$ — și tot așa pot fi găsiți constituienți comuni dacă comparăm între ele formulele (16.22) și (16.23). Mai mult, dacă aplicăm o serie de transformări, să spunem formulei (16.21), în maniera în care astfel de transformări au fost aplicate formulei (16.11), atunci am putea spune că fiecare din formulele de mai sus exprimă printr-o parte a constituienților ei un operator care nu se bucură de proprietatea de a fi armonic conjugat cu alți trei operatori ai *CP*. Cu toate acestea, de această dată, nu mai

putem conchide că formulele mai sus înscrise nu s-ar bucura de proprietatea de a fi armonic conjugate.

Astfel, ducînd pînă la capăt transformările produse, vom constata că formula (16.21) poate fi simplificată, eliminînd din componența ei tocmai acei constituienți care ar semnifica un operator ce nu se bucură de proprietatea de a fi armonic conjugat. Menționăm că eliminarea constituienților la care ne-am referit, poate fi îndeplinită fără a altera cu ceva valoarea de adevăr a expresiei afectate. Luăm un singur exemplu, și anume, formula (16.21) pe care, după ce am presupus o grupare admisă de asociativitatea conjuncției, o putem transforma în:

(16.25) $[C\vee(A\vee B\cdot A\vee\bar{B}\cdot\bar{A}\vee B\cdot\bar{A}\vee\bar{B})\cdot\bar{A}\vee B\vee\bar{C}$

Pe baza așa-numitelor legi de posibilitate ale disjuncției se poate dovedi echivalența formulei (16.25) cu expresia:

(16.26) $C\cdot(\bar{A}\vee B\vee\bar{C})$

Avînd în vedere caracterul corect al transformărilor operate asupra formulei (16.21) ea este echivalentă cu formula (16.26). În baza trecerii de la formula (16.21) la formula (16.26), întrucît eliminarea acelor constituienți ai formulei (16.21) care desemnau un operator din prima clasă a fost posibilă, fără a schimba cu nimic valoarea de adevăr a formulei (16.21), putem conchide că prezența, explicită sau implicită, a unui operator ce nu se bucură de proprietatea de a fi armonic conjugat, în alcătuirea formulei (16.21), este nesemnificativă pentru această expresie.

(16.21)

a) *cazuri adevărate:*

ABC, $\bar{A}BC$, $\bar{A}\bar{B}C$

b) *cazuri false:*

$A\bar{B}C$, $AB\bar{C}$, $A\bar{B}\bar{C}$, $\bar{A}B\bar{C}$

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

(16.24)

a) *cazuri adevărate:*

$AB\bar{C}$, $A\bar{B}\bar{C}$, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

b) *cazuri false:*

ABC, $\bar{A}BC$, $\bar{A}BC$, $\bar{A}B\bar{C}$,

$\bar{A}B\bar{C}$

(16.22)

a) *cazuri adevărate:*

ABC, $A\bar{B}C$, $\bar{A}BC$, $\bar{A}\bar{B}C$, $\bar{A}B\bar{C}$

b) *cazuri false:*

$AB\bar{C}$, $A\bar{B}\bar{C}$, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

(16.23)

a) *cazuri adevărate:*

$\bar{A}\bar{B}C$, $AB\bar{C}$, $A\bar{B}\bar{C}$, $\bar{A}B\bar{C}$, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

b) *cazuri false:*

ABC, $\bar{A}BC$, $\bar{A}\bar{B}C$

În consecință, formulele (16.21), (16.22), (16.23) și (16.24) sînt expresii ale *CP* armonic conjugate şi prin urmare, ele pot fi ordonate într-un pătrat logic consistent, aşa cum rezultă din prezentarea cazurilor în care, formulele analizate, sînt adevărate sau false.

Analiza întreprinsă în acest paragraf ne permite să conchidem posibilitatea de a extinde proprietatea unor entități logice de a fi armonic conjugate de la nivelul operatorilor *CP* la nivelul expresiilor, evident *fbf*, logicii standard. Luarea în discuție a expresiilor logicii standard, din punctul de vedere al principiului dualității, ne-a impus operarea unor distincții. Astfel, în primul etaj al analizei, ne-am referit la expresii de complexitate medie, adică la formule logice în alcătuirea cărora intră, în mod repetat, numai două variabile propoziționale. Pentru cazul lor, fiind din principiu excluse situațiile cînd expresia supusă analizei ar fi o tautologie, o contradicție sau o expresie auto-duală, criteriul pe baza căruia putem detecta dacă o expresie oarecare poate fi înțeleasă ca prima dintr-un grup de patru formule armonic conjugate, constă în aceea că, pe calea oricăror transformări logicește admise, ea nu trebuie să fie reductibilă, în ansamblul ei, la echivalență sau la disjuncție exclusivă. Dacă o astfel de formulă, pe calea unor asemenea transformări, poate fi redusă la echivalență sau la disjuncția exclusivă, nu într-o parte a ei doar, ci în întregul ei, atunci dispunem de certitudinea faptului că ea nu face parte dintr-un grup de patru expresii armonic conjugate.

În cazul în care avem în vedere expresii mai complexe, adică formule alcătuite din mai mult de două variabile propoziționale distincte, criteriul de detectare a proprietății pe care o discutăm trebuie modificat. Evident, și în acest caz se exclude de la început orice expresie care ar fi o tautologie, o contradicție sau o expresie auto-duală. Aceste situații fiind excluse și fiind dată o expresie oarecare, putem spune că ea face parte dintr-un grup de patru expresii armonic conjugate dacă și numai dacă ea nu conține, explicit sau implicit, printr-un constituient al ei sau printr-un grup de astfel de constituienți, echivalența sau disjuncția exclusivă. Testul că expresia considerată nu cuprinde, în sensul descris echivalența sau disjuncția exclusivă, constă în aducerea expresiei date la o formă minimă; dacă în forma ei minimă nu se poate constata prezența echivalenței sau a disjuncției exclusive, atunci

expresia considerată inițial face parte dintr-un grup de patru formule armonic conjugate. Dacă, în schimb, în forma ei minimă, expresia considerată cuprinde echivalența sau disjuncția exclusivă, atunci în mod sigur ea nu face parte dintr-un grup de patru formule armonic conjugate.

Evident, fiind dată o singură expresie, dacă ea a rezistat testului indicat, ea poate fi luată ca punct de plecare pentru a construi dualul ei, negația ei și dualul negației sau negația dualului ei și pentru a obține, în acest fel, un grup de patru expresii armonic conjugate. În sfîrșit, dacă patru formule s-au dovedit a fi armonic conjugate, atunci ele pot da naștere cu certitudine unui pătrat logic consistent, adică avem siguranța că între ele funcționează în mod perfect raporturile cunoscute ca proprii pătratului logic clasic și inferențele corespunzătoare acestor raporturi.

II

ÎNCERCARE PENTRU O MATRICE A OPERATORULUI ▷

În mod obișnuit, operatorii fundamentali ai oricărui calcul asociat unei logici își găsesc o definiție matricială înainte de utilizarea lor, pe o cale strict formală, în interiorul calculului. Exemplul cel mai clar și cel mai cunoscut poate fi oferit, fără îndoială, de operatorii *CP* asociat logicii standard. Așa cum este obișnuit pentru logica standard, definiția matricială, sau altfel spus, prin intermediul unor tabele de adevăr, este însoțită de o analiză, tot matricială, a proprietăților formale ale operatorului considerat, precum și a relațiilor sale față de ceilalți operatori ai calculului.

1. NEGAȚIE ȘI DUALITATE

Pentru cazul operatorului ▷ această sarcină apare a fi mai dificilă, dat fiind modul specific de construire a dualului unei expresii date. Privit în general, operatorul ▷ prezintă unele asemănări cu operatorul *N*. Aceste asemănări rezidă din faptul că, atît operația de dualizare pe care o semnifică ▷, cît și operația de negare, pe care o denotă *N*, se aplică asupra unei formule logice în mod global, formula afectată de una dintre aceste două operații fiind, din punctul lor de vedere, un întreg continuu. Cu alte cuvinte, cei doi operatori, ▷ și *N*, corespunzători operațiilor logice citate, apar a fi ***operatori monari.*** De exemplu, negația se aplică în același fel și unei variabile individuale și unei formule logice complexe;

din punctul de vedere al operației de negare, o variabilă individuală și o *fbf* oricît de complexe sînt, — într-un anumit sens — echivalente. Acest *anumit sens* nu înseamnă aici numai faptul că o variabilă individuală, să spunem în cadrul *CP*, poate fi definită ca o *fbf* a calculului considerat. De asemenea, afirmația noastră nu conține ideea că, în cazul unei *fbf* complexe oarecare, negarea, într-un fel sau altul, numai a variabilelor din care ea este alcătuită este echivalentă cu aplicarea negației asupra formulei considerate, ca întreg. Ceea ce dorim să spunem este doar faptul că, atunci cînd negația este aplicată asupra unei *fbf* oarecare, formula afectată este luată ca un singur element, fiind indiferent, din punctul de vedere al operației de negare, dacă formula afectată este simplă sau presupune o structură internă. În contextul operației de negare, orice formulă logică, simplă sau complexă, devine un obiect individual, singular, lipsit de structură. În acest sens, pentru negare, o variabilă singulară este echivalentă cu o formulă complexă și aceasta nu din punctul de vedere al rezultatului negării, ci din cel al mecanismului de aplicare a ei.

Operatorul $\rhd$ se aseamănă cu operatorul *N* în sensul că ambii pot fi considerați operatori monari, dar o analiză a operației de dualizare, în paralel cu cea de negare, ne conduce la concluzia unor deosebiri importante între aceste două operații și, în consecință, între operatorii $\rhd$ și *N*. O primă deosebire între operatorul $\rhd$ și operatorul *N*, fundamentată pe deosebirea dintre operațiile denotate de ei, este ușor de pus în evidență. Anume, $\rhd$ și *N* fiind doi operatori distincți, este firesc, mai bine zis este de la sine înțeles, ca aplicați la aceeași formulă logică să ducă la rezultate diferite. Este poate surprinzător că în analiza legăturilor dintre dualizare și negare am apelat la o chestiune care poate părea de-a dreptul trivială: faptul că rezultatul a două operații diferite (doi operatori diferiți) care afectează același obiect este diferit. Am făcut aceasta însă numai pentru că, există autori în concepția cărora dualizare și negație, deși concepute ca operații diferite, înseamnă totuși același lucru și aceasta tocmai prin prisma rezultatului obținut prin aplicarea fiecăreia din aceste operații asupra unei singure formule. Revenind acum la ideea discutată aici, putem spune chiar mai mult, și anume că, operațiile de dualizare și negare se deosebesc nu numai prin rezultatul

aplicării lor la aceeași formulă logică, ci și prin modul diferit în care se aplică ele acelei formule.

Luînd în considerație definițiile matriciale ale celor 16 operatori binari ai *CP*, enunțate prin tabelul nr. 1, matricea lui *N* și scurta incursiune în felul de aplicare al operației de negare, credem că, după felul de aplicare al operațiilor desemnate de ei asupra unei formule logice oarecare, nu există deosebiri importante între acești 17 operatori logici. Maniera de aplicare la care facem apel, este sesizabilă, cel puțin în punctele ei principale, în construcția definițiilor matriciale pentru fiecare din operatorii logici considerați. Fără îndoială, fiecare dintre acești operatori logici are specificul său, care nu rezidă numai în rezultatul tabelului de adevăr utilizat pentru definirea lui. În primul rînd, proprietățile formale ale fiecărui operator constituie un fundament pentru a opera deosebiri între ei. Și chiar dincolo de aceste proprietăți bine cunoscute, alte tipuri de analiză, ca de exemplu autoconectarea, pot scoate la lumină și alte aspecte prin care cei 17 operatori ai *CP* se disting unul față de celălalt [35 p. 349—367]. În același fel, nu putem uita faptul că negarea, căreia îi corespunde operatorul *N*, se distinge de celelalte operații logice desemnate de ceilalți 16 operatori, dar această ultimă deosebire dintre *N* și operatorii binari ai *CP* ține tocmai de faptul că, spre deosebire de toți ceilalți, *N* este un operator monar. Analiza conexiunilor logice în cadrul sistemului lui Lesniewski a avut drept rezultat evidențierea unor aspecte deosebit de importante privind natura operatorilor logici, asemănările și deosebirile dintre ei. [34].

Ceea ce este însă important, din perspectiva scopului urmărit de noi — o caracterizare cît mai completă a dualizării și a operatorului ▷, corespunzător ei — este faptul că, deosebirile dintre cei 16 operatori binari ai *CP*, pe de o parte, și deosebirile dintre ei și operatorul monar al negației, pe de altă parte, nu sînt de natură să conducă la încadrarea operatorilor *CP* în tipuri diferite de generalitate. Mai precis spus, deosebirile cunoscute între operatorii considerați nu ar justifica o concluzie după care, o parte din ei ar ține, să spunem, de domeniul unei logici-obiect, iar ceilalți de domeniul unei metateorii a acestei logici. Credem că nici o altă deosebire, la fel de esențială ca cea sugerată, nu poate fi recunoscută între cei 17 operatori considerați. Cel mai aproape de a fi acceptat ca avînd

un statut special ar fi operatorul *N*, dar o astfel de concluzie s-ar baza doar pe o aparență.

Într-adevăr, *N*, ca operator monar, se aplică unor formule complexe în componența cărora intră alți operatori logici, la fel de bine şi în acelaşi fel cum se aplică unui element singular şi în plus, în cunoscutul tabel general al celor 16 operatori ai *CP* asociat logicii standard, operatorul *N* nu-şi află definiția matricială într-o anume coloană specială a tabelului, aşa cum este cazul oricăruia din ceilalți 16. Existența operatorului *N* poate fi evidențiată numai dacă comparăm între ele coloanele celorlalți operatori, şi anume, a celor din prima jumătate cu cele din a doua jumătate a tabelului. Această situație se datoreşte însă faptului că, tabelul la care ne referim, prin însuşi felul în care a fost construit, dă expresie directă numai operatorilor binari şi nu ține de faptul că operatorul *N* s-ar situa, prin sensul său, la un alt nivel logic decît ceilalți 16 operatori, prezenți în mod explicit în tabelul nr. 1. În fond, într-un anume sens, nu numai operatorul *N* se află în situația de a putea fi aplicat atît variabilelor individuale cît şi formulelor mai complexe, alcătuite ele însele din variabile proporționale, legate între ele prin intermediul operatorilor binari considerați. O formulă ca aceea care exprimă comutativitatea conjuncției, este o echivalență de conjuncții, iar formula cunoscută sub numele de „contrapoziția implicației" este o implicație de două implicații, din care una între două negații. Cu toate acestea, în aceste cazuri şi nici în altele similare lor, nici operatorul *E* şi nici operatorul *C*, nu pot fi considerați ca ținînd de un domeniu metateoretic sau ca avînd o situație cu totul specială în comparație cu apariția aceloraşi operatori în *fbf* de maximă simplitate. Aplicarea operatorului *N* asupra unor formule complexe poate părea mai firească decît a oricărui alt operator, numai pentru că *N* este un operator monar şi, din această cauză, aplicarea sa este la fel de firească asupra unei variabile individuale şi asupra unei formule mai complexe. Faptul că, aplicarea negației asupra unei formule complexe presupune înțelegerea acestei formule complexe ca şi cum ar fi o singură variabilă propozițională, nu constituie o rațiune suficientă pentru a acorda negației, în sensul mai sus presupus, un loc cu totul special față de ceilalți operatori ai *CP*. De fapt, operatorii *E* şi *C*, în formulele complexe citate, presupun, în actul aplicării lor la alte formule complexe, înțelege-

rea acestor din urmă formule ca niște variabile individuale, într-un sens asemănător cu cel în care negația cerea acest lucru.

Operatorul ▷, ca semn pentru operația de dualizare, poate fi privit ca asemănător cu negația sub un anumit aspect și anume, caracterul său de operator monar. Deși strîns legat de negație și nu numai în înțelesul citat, operatorul ▷ pare să se deosebească destul de mult atît față de negație, cît și față de ceilalți operatori ai *CP*.

Comparat cu operatorii *CP*, operatorul ▷ pare a fi apropiat cel mai mult de operatorul *N* și tocmai acesta a fost motivul pentru care am insistat pînă acum asupra negației. O deosebire importantă între operatorii ▷ și *N* poate fi totuși pusă în evidență dacă facem apel la modul de construire a dualului unei formule date, în comparație cu alcătuirea negației aceleiași formule. Modalitatea de construire a negației unei formule devine evidentă prin simpla citire a definiției matriciale a operatorului *N*: „negația unui enunț adevărat este falsă și negația unui enunț fals este adevărată". De aici rezultă că, dată fiind definiția matricială a unei formule oarecare, simpla inversare a valorilor de adevăr *adevăr* și *fals* — din soluția matricii duce la definiția negației primei formule.

Tot pe baza celor spuse pînă în prezent cu privire la operația de dualizare, este lesne de remarcat că definiția matricială a unui eventual operator al dualității (în cazul nostru operatorul ▷) diferă sensibil de cea a negației, mai sus amintite. Pornind de la faptul că noi am acceptat o anumită definiție a dualității, rezultă că, dată fiind o *fbf* oarecare a *CP*, dualul ei va putea fi obținut prin două feluri de schimbări, operate simultan. Prima categorie de schimbări se aplică variabilelor componente ale formulei considerate, iar cea de a doua se aplică soluției care îi corespunde, în definiția ei matricială, formulei noastre. De fapt, definiția dualului prezentată anterior, exprimă, destul de clar toate acestea. Atît din cele spuse acum, cît și din definiția amintită, reiese că negația îndeplinește un rol fundamental în obținerea dualului unei expresii date. Reamintim faptul că, atît pentru schimbarea valorilor de adevăr ale variabilelor componente, cît și a celor care corespund funcției de adevăr ca întreg, se operează prin intermediul negației. Implicarea operatorului *N* în definirea

operatorului $\rhd$, deschide perspectiva unor noi aspecte privind relația dintre dualitate și negație.

Înainte însă de a merge mai departe, se pare că ar trebui să ne oprim asupra unei chestiuni care ar putea să dea naștere unor neînțelegeri. Iată despre ce este vorba. Deosebirea dintre operatorul $\rhd$ și operatorul N, ca de altfel și legătura dintre ei, ar ține de faptul că negația este indispensabilă pentru o definiție riguroasă a dualității. Dar, dacă luăm în considerație teorema negației prezentată de B. Mates, s-ar putea ridica obiecția că, la rîndul său, operatorul $\rhd$ este implicat în definirea negației. Amintim că, în conformitate cu această teoremă, negația unei formule poate fi redată înlocuind operatorul (operatorii) acestei formule cu dualul (dualii) său și totodată înlocuind variabilele componente ale formulei cu negațiile lor. Noi considerăm că, teorema negației dată de B. Mates poate servi ca un mijloc de construcție a negației unei formule și nu ca o definiție, în sensul propriu al cuvîntului, a negației și aceasta pentru că, teorema lui B. Mates, luată ca o definiție a negației, ar presupune conceptul dat spre definire (negația) în componența noțiunii care definește.

2. O MATRICE PENTRU $\rhd$. PREDUALUL

Dată fiind caracterizarea dualității prin intermediul limbajului natural, se poate remarca că o eventuală definiție matricială a operatorului $\rhd$, corespunzător operației de dualizare, presupune o modalitate specială de construcție a matricii. În acest sens obținerea dualului unei expresii date presupune două tipuri de schimbări — variabile componente și formulă ca întreg. În consecință, și construirea unei matrici pentru operatorul $\rhd$ trebuie să urmeze două trepte.

Prima treaptă va consta în obținerea unei formule pe care noi o numim *predual* ($\rhd'$) și care marchează prima schimbare presupusă de operația de dualizare. Cea de a doua treaptă, marcînd cea de a doua schimbare, constituie trecerea de la pre-dualul la dualul ($\rhd$) formulei inițiale.

Pe baza caracterizării date anterior relației dintre o *fbf* oarecare și dualul ei, s-a constatat că dualul presupune o inversare simetrică a valorilor de adevăr corespunzătoare formulei inițiale, în matricea ei. În acest sens, ni se pare semni-

ficativă remarca lui Lesniewski, după care, obținerea dualului unei conexiuni logice oarecare presupune o inversare a fiecărui component și o inversare de 180° a soluției, în raport cu o axă perpendiculară pe planul matricii și prin centrul ei [34, p. 294].

Reamintind notația folosită anterior, în conformitate cu care am convenit să denotăm prin șirul „(v_1, v_2, v_3, v_4)" succesiunea valorilor de adevăr din soluția înscrisă într-o matrice pentru o formulă a logicii standard ce conține numai două variabile propoziționale și o singură apariție a unuia din cei 16 operatori binari ai *CP* și încercînd o generalizare, vom spune că într-o *fbf* a logicii standard, alcătuită prin intermediul operatorilor binari, pentru un număr n ($n \geqslant 2$) de variabile propoziționale, vom avea $n - 1$ apariții ale operatorului binar constituient, sau $n - 1$ apariții ale operatorilor binari constituienți. Este, de asemenea, cunoscut că, dacă numărul variabilelor propoziționale dintr-o *fbf* este mai mare decît 2, $n > 2$, atunci și șirul valorilor de adevăr din soluția înscrisă în matrice pentru expresia considerată este mai mare de 4; de exemplu, pentru 3 variabile propoziționale, numărul acestor valori se ridică la 8. Întrucît folosim expresii cu un număr oricît de mare, dar finit, de variabile propoziționale, rezultă că și numărul valorilor de adevăr ce formează soluția unei asemenea funcții de adevăr, sau altfel spus, numărul valorilor de adevăr prin care formula considerată se definește pe cale matricială, poate fi, la rîndul său, oricît de mare, dar tot finit. În plus, numărul valorilor de adevăr care formează soluția înscrisă în matricea formulei considerate este dependent de numărul variabilelor propoziționale ce intră în alcătuirea acestei expresii. Astfel, dacă numărul variabilelor propoziționale din care este alcătuită o *fbf* oarecare este egal cu n, atunci numărul valorilor de adevăr din soluția ce îi corespunde în matrice acestei formule este egal cu 2^n*.

În aceste condiții, dacă notăm cu „Φ" operatorul constitutiv al formulei și cu „*pn*" mulțimea variabilelor propoziționale componente, atunci valoarea funcției de adevăr cores-

* Precizăm că atunci cînd spunem „numărul valorilor de adevăr" avem în vedere nu existența a mai mult de două valori de adevăr — adevăr și fals — ci numărul cazurilor distincte în care aceste două valori apar în soluția unei matrici de adevăr.

punzătoare formulei noastre poate fi redată prin următoarea expresie:

$$(22.1)\ \gamma\Phi^{n-1}\ pn = (v_1, v_2, \ldots, v_{2^n-1}, v_{2^n},)^*$$

Dacă formula (22.1) desemnează valoarea de adevăr (γ) a formulei considerate de noi, valoare exprimată matricial, atunci prima treaptă în obținerea dualului va fi desemnată prin formula:

$$(22.2)\ \gamma \rhd'\Phi^{n-1}_{\blacktriangle} pn = (v_{2^n}, v_{2^n-1}, \ldots, v_2, v_1)]$$

în care $\rhd'\Phi^{n-1}\ pn$ denotează, așa cum am stabilit anterior, *predualul* formulei $\Phi^{n-1}\ pn$, considerată inițial. Se poate observa că în obținerea predualului formulei $\Phi^{n-1}pn$ a fost operată o inversare — simetrică în raport cu ordinea lor inițială — a șirului valorilor de adevăr din soluția funcției, am spune o rotație de 180° în raport cu un vector care ar indica ordinea în care valorile funcției se succedau inițial.

Vom încerca să prezentăm această schimbare în contextul cunoscutelor tabele de adevăr. Pentru aceasta, convenim ca litera c_i să desemneze combinația de valori de adevăr pentru variabilele propoziționale ce intră în alcătuirea formulei $\Phi^{n-1}pn$ și căreia îi corespunde ca valoare a funcției de adevăr asociate acestei formule, valoarea de adevăr v_i; altfel spus, în matricea formulei $\Phi^{n-1}pn$, v_i este o soluție pentru această formulă în cazul în care variabilele propoziționale care alcătuiesc această formulă au valorile de adevăr desemnate de combinația c_i. Mai precizăm că, șirul combinațiilor de valori de adevăr pentru variabilele componente cuprinde același număr de elemente ca și șirul valorilor de adevăr care formează soluția matricială pentru formula considerată, adică după cum în soluția matricii avem v_2n valori de adevăr, tot așa pentru variabilele propoziționale componente vom avea c_{2^n} combinații de valori de adevăr. În plus, convenim să desemnăm prin șirul (c_1, c_2, ..., c_{2^n-1}, c_{2^n}) baza matricii, iar prin șirul (v_1, v_2, ... v_{2^n-1},

* Pentru formula (22.1) și pentru cele ce urmează păstrăm aceeași convenție stabilită încă în paragraful (1.1), după care, v_1 este valoarea funcției pentru cazul în care $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ au toți valoarea 1 .... ; v_2n este valoarea funcției cînd toți $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ au valoarea 0. Celorlalte soluții, între v_1 și v_2, le corespund celelalte combinații ale valorilor 1 și 0 pentru p_1, p_2, p_3 .... pn.

v_2n), soluția matricii. În aceste condiții matricea:

Baza matricii	Soluția	matricii
$p_1, p_2, \ldots, pn$	$\Phi^{n-1}pn$	$\triangleright'\Phi^{n-1}pn$
c_1	v_1	v_{2^n-1}
c_2	v_2	v_{2^n}
.	.	.
.	.	.
.	.	.
c_{2^n-1}	v_{2^n-1}	v_2
c_{2^n}	v_{2^n}	v_1

Matricea (M. 22.1)

definește *predualul* formulei $\Phi^{n-1}\,pn$. Este de remarcat faptul că, raportate la soluția corespunzătoare predualului formulei $\Phi^{n-1}pn$, valorile, sau mai bine zis, combinațiile de valori, din baza matricii rămîn în poziția inițială, adică valorile de adevăr ale variabilelor propoziționale ce intră în alcătuirea formulei $\Phi^{n-1}\,pn$ au rămas pe același loc și pentru predualul acestei formule, $\triangleright'\Phi^{n-1}pn$. Mai precis spus, dacă pentru formula (22.1) v_1 desemna soluția formulei pentru cazul în care toate variabilele ei propoziționale aveau valoarea de adevăr *adevăr*, iar v_{2^n} soluția aceleiași formule pentru cazul în care toate variabilele ei propoziționale aveau valoarea de adevăr *fals*, atunci pentru formula (22.2) situația este exact inversă, fiecare valoare de adevăr din soluția matricială a acestei formule ocupînd o poziție opusă, dar și simetrică, față de poziția pe care o ocupa inițial în soluția formulei (22.1). Această inversiune simetrică s-a produs pentru tot șirul (v_1, v_2 . . . ., v_{2^n-1}, v_{2^n}), adică rotația de care vorbeam anterior a afectat fiecare membru al acestui șir.

Aplicînd operațiile indicate pînă acum într-un caz concret, să spunem al disjuncției și considerînd că valoarea de adevăr a formulei *Apq* este redată de expresia:

(22.3) $\gamma Apq = (1,\ 1,\ 1,\ 0)$

valoarea predualului ei va fi exprimată astfel:

(22.4) $\gamma \triangleright' Apq = (0,\ 1,\ 1,\ 1)$

sau, dacă folosim, ca și mai sus, tabelele de adevăr, avem:

p q	Apq	$\triangleright' Apq$
1 1	1	0
1 0	1	1
0 1	1	1
0 0	0	1

Matricea (M. 22.2)

Este, ușor de observat că în exemplul folosit locul lui Φ a fost luat de A, iar $n = 2$, astfel încît $p_1 = p$ și $p_2 = q$.

Pentru ca din predualul formulei care constituie obiectul discuției noastre să obținem dualul ei, este necesar să schimbăm fiecare apariție a valorii de adevăr *adevăr* din soluția cuprinsă în matricea predualului cu valoarea de adevăr *fals* și reciproc, să schimbăm valoarea de adevăr *fals* cu valoarea de adevăr *adevăr*. Deci, dacă formula (22.2) exprima valoarea predualului formulei $\Phi^{n-1}pn$, atunci valoarea dualului acestei formule, $\triangleright \Phi^{n-1}pn$, va fi exprimată de formula:

$$(22.5)\ \gamma \triangleright \Phi^{n-1}pn = (Nv_{2^n},\ Nv_{2^n-1}, \ldots, Nv_2, Nv_1)$$

Corespunzător formulei (22.5), tabelul:

Baza matricii	Soluția matricii		
$p_1, p_2 \ldots p_n$	$\Phi^{n-1}pn$	$\triangleright' \Phi^{n-1}pn$	$\triangleright \Phi^{n-1}pn$
c_1	v_1	v_{2^n}	Nv_{2^n}
c_2	v_2	v_{2^n-1}	Nv_{2^n-1}
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
c_{2^n-1}	v_{2^n-1}	v_2	Nv_2
c_{2^n}	v_{2^n}	v_1	Nv_1

Matricea (M.22.3)

exprimă sub forma unei matrici definiția formulei $\Phi^{n-1}pn$, a predualului ei și a dualului ei — în această ordine — în cadrul rubricii „Soluția matricii". Eliminînd din matricea (M. 22.3) coloana corespunzătoare soluției predualului formulei $\Phi^{n-1}pn$, am putea obține o nouă matrice, mai restrînsă, care ar fi

expresia directă a definiției lui $\triangleright \Phi^{n-1} pn$, adică a dualului formulei inițiale.

Dacă revenim la exemplul inițiat mai sus, valoarea dualului lui Apq se poate exprima prin formula:

(22.6) $\gamma \triangleright Apq = (1, 0, 0, 0)$

sau, folosind procedeul matricial, dualul disjuncției poate fi redat astfel:

pq	Apq	$\triangleright Apq$
1 1	1	1
1 0	1	0
0 1	1	0
0 0	0	0

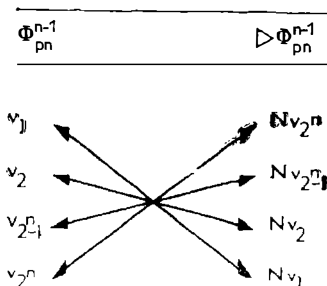
Matricea (M.22.4)

După cum se observă, în obținerea dualului unei formule oarecare ($\Phi^{n-1} pn$) ne-am folosit de două procedee, oarecum diferite prin natura lor. Primul dintre ele este o inversare, propriu-zis, o mișcare de rotație pentru valorile cuprinse în soluția matricii, astfel încît, după ce această rotație a fost efectuată și deci predualul a fost obținut, fiecare valoare de adevăr din șirul de valori ce alcătuiesc soluția matricială a predualului ocupă o nouă poziție în raport cu cea ocupată în soluția matricială corespunzătoare formulei inițiale, și anume, poziția simetrică față de cea anterioară, socotită simetrică în raport cu centrul matricii, iar valoarea de adevăr care ocupa înainte poziția ocupată de ea acum se află așezată în locul lăsat liber de ea. Altfel spus, urmînd îndeaproape ideile lui Lesniewski, dacă ne imaginăm o axă perpendiculară pe matricea inițială, exact prin centrul ei, predualului îi va corespunde o nouă matrice obținută prin rotirea cu 180° a primei matrici, în raport cu axa considerată.

Cel de al doilea mijloc utilizat pentru obținerea dualului formulei asumate, mai precis spus, procedeul prin care trecem de la predual la dual, poate fi realizat cu ajutorul operatorului N, așa cum de altfel rezultă și din citirea formulei (22.5) sau a matricii (M.22.3). Schimbarea valorii de adevăr ***adevăr*** cu valoarea de adevăr *fals* și reciproc. schimbarea valorii de

adevăr *fals* cu valoarea de adevăr *adevăr*, pentru fiecare din v_{2^n}, v_{2^n-1}, ..., v_2, v_1 este echivalentă, dată fiind definiția asumată pentru operatorul N, cu aplicarea negației asupra fiecărui caz din soluția înscrisă în matrice, iar această operație este de fapt echivalentă cu negarea expresiei a cărei soluție matricială este supusă unei astfel de transformări. Încercăm să exprimăm prin tabelul de mai jos cele două trepte succesive în obținerea dualului unei formule oarecare (rotirea soluției și simultan schimbarea valorii de adevăr *adevăr* cu valoarea de adevăr *fals* și reciproc, a valorii de adevăr *fals* cu valoarea de adevăr *adevăr*, prin intermediul negației):

Tabelul 3



Evident, tabelul nr. 3 nu are o valoare mai mare decît de a arăta printr-o schemă, pe care noi am dorit-o intuitivă, cele două trepte în obținerea dualului unei formule oarecare, ca și simetria ce există între o formulă oarecare și dualul ei.

Pe baza celor spuse privind trecerea ei de la predual la dual rezultă în primă instanță cel puțin două consecințe. Prima este evidentă și constă în aceea că trecerea de la predual la dual implică operația de negare desemnată de operatorul N. A doua, la fel de evidentă, constă în aceea că, pe baza celor constatate privitor la intervenția operației de negare în operația de obținere a dualului din predual, se poate afirma că între predual și dual există o relație ca de la afirmație la negație. Altfel spus, faptul rezultă și din compararea formulelor (22.2) și (22.5) sau (22.4) și (22.6) — dacă revenim la exemplul utilizat — ca și din matricea (M. 22.3), se poate afirma că *negația predualului este echivalentă cu dualul* și conversa, *negația dua-*

lului este echivalentă cu predualul. Exprimate în limbajul formulelor, cele două aserțiuni arată astfel:

(22.7) $N \rhd' \Phi^{n-1}pn \equiv \rhd \Phi^{n-1}pn$

(22.8) $N \rhd \Phi^{n-1}pn \equiv \triangle' \Phi^{n-1}pn$

Din cele expuse pînă în prezent rezultă că pasul doi în procedeul de obținere a unei definiții matriciale a dualului unei formule oarecare a *CP*, mai bine zis, în procedeul de obținere a unei definiții matriciale a operatorului $\rhd$, se realizează, fără îndoială, pe un parcurs familiar logicii standard. Altfel spus, obținerea dualului din predual fiind o transformare ce poate fi efectuată prin intermediul operatorului *N*, așa cum arată formulele (22.7) și (22.8) sau matricea (M22.3), nu poate atrage, în principiu, obiecții. Cu totul alta rămîne însă situația, cel puțin pînă în prezent, pentru primul pas în operația de obținere a dualului unei formule oarecare a *CP*, adică trecerea de la formula inițială la predual. Reiese că prima treaptă a procedeului de construcție a definiției matriciale a operatorului $\rhd$, a fost realizată printr-un procedeu ce pare, cel puțin la prima vedere, străin de mijloacele în sens strict, familiare logicii standard. Ne referim, evident, la acea operație de inversiune simetrică a soluției cuprinsă în matricea formulei inițiale, inversare care, a putut fi exprimată ca o rotire a matricii cu 180° față de o axă perpendiculară în centrul planului matricii. Evident că această mișcare de rotație poate fi explicată dacă ne imaginăm matricea ca un sistem grafic definit într-un plan. Întrebarea care se pune este însă dacă această mișcare de rotație a matricii formulei inițiale și care are drept rezultat obținerea matricii predualului formulei inițiale poate fi exprimată în termeni pur logici, sau dacă i se poate găsi o procedură logică echivalentă, evident, cel puțin prin rezultat. Reamintim că, pentru rotația implicată în prima treaptă a procedeului de obținere a unei definiții matriciale pentru operatorul $\rhd$, noi am luat în considerație numai o parte a planului matricii și anume cea corespunzătoare soluției înscrise în matrice.

Răspunsul la această întrebare este afirmativ. Există un procedeu logic care, aplicat formulei inițiale, duce la obținerea unui rezultat echivalent cu acela al rotirii planului matricii cu 180° față de axa considerată (evident, a porțiunii din

planul matricii care înscrie soluția), adică are drept rezultat obținerea predualului.

Deloc surprinzător, dacă ținem seamă de caracterizarea dată inițial operației de dualizare, acest procedeu logic constă, la rîndul său, din folosirea negației. De data aceasta însă, operatorul N nu afectează soluția cuprinsă în matrice, adică formula în ansamblul ei, ci fiecare din variabilele componente ale formulei definită prin matrice. Altfel spus, predualul unei expresii date este echivalent cu o formulă alcătuită din negațiile variabilelor din formula inițială, conectate de operatorul formulei inițiale. În consecință, dacă pornim de la faptul că pn desemnează mulțimea variabilelor propoziționale conectate de operatorul Φ și convenim ca mulțimea negațiilor variabilelor propoziționale conectate de operatorul considerat să fie desemnată prin Npn, atunci formula:

(22.9) $\rhd'\Phi^{n-1}pn \equiv \Phi^{n-1}Npn$

exprimă relația dintre predualul unei formule oarecare a CP și această formulă. Putem considera, totodată, că formula (22.9) indică și procedeul logic echivalent cu operația folosită de noi pe prima treaptă a drumului de construire a unei definiții matriciale a operatorului $\rhd$, concretizată în obținerea dualului unei formule oarecare. Folosind procedeul matricial, vom putea pune în evidență caracterul de lege logică al formulei (22.9):

Baza matricii	— Soluția matricii —				
$p_1, p_2, \ldots, p_n$	$\Phi^{n-1}pn$	$\rhd'\Phi^{n-1}pn$	$Np_1, Np_2, \ldots, Np_n$	$\Phi^{n-1}Npn$	$\rhd'\Phi^{n-1} \equiv \Phi^{n-1}Npn$
c_1	v_1	v_{2^n}	c_{2^n}	v_{2^n}	1
c_2	v_2	v_{2^n-1}	c_{2^n-1}	v_{2^n-1}	1
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
c_{2^n-1}	v_{2^n-1}	v_2	c_2	v_2	1
c_{2^n}	v_{2^n}	v_1	c_1	v_1	1

Matricea (M.22.5)

La acelaşi rezultat vom ajunge dacă încercăm aplicarea formulei (22.9) la exemplul pe care l-am folosit pînă acum.

p	q	Apq	▷'Apq	NpNq		ANpNq	▷'Apq ≡ ANpNq
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Matricea (M.22.6)

Revenind în acest moment, după ce am analizat modul de construire a matricii operatorului ▷, modalitate exprimabilă prin formula (22.5), pentru cazul în care valoarea de adevăr a unei formule oarecare a *CP*, $\Phi^{n-1}pn$, este redată prin şirul (v_1, v_2 . . ., v_{2^n-1}, v_{2^n}), la asemănările dintre ▷ şi *N*, considerăm că, înainte de a trece mai departe, se impune o precizare. Am arătat la începutul acestui capitol că operatorii ▷ şi *N* pot fi ambii înţeleşi ca operatori monari. Cu acelaşi prilej am menţionat faptul că, deosebirile dintre dualitate şi negaţie şi, în consecinţă, dintre operatorii corespunzători acestor operaţii, vizează nu numai rezultatul aplicării lor la aceeaşi formulă, dar şi modul de aplicare a lor. Reamintind aici scurta analiză asupra negaţiei, se poate observa, din procedeul de construire a matricii dualului că, definirea lui ▷ implică utilizarea operatorului *N*. Intervenţia operatorului *N* în definirea lui ▷, propriu-zis în constituirea dualului unei expresii date, are loc pe fiecare din cele două trepte ale procedeului de obţinere a dualului. Deosebirile dintre aceste două trepte şi dintre rezultatele lor, deci dintre predual şi dual, ţin tocmai de modul diferit în care operatorul *N* este implicat pe fiecare din aceste trepte. Se poate conchide, că deşi operatorul ▷ îşi subordonează operatorul *N*, totuşi *N* este condiţie fără de care dualul nu poate deveni un act înfăptuit.

În sfîrşit, o ultimă observaţie. Pe baza formulei (22.8) se poate conchide că, la rîndul său, predualul este definibil în termenii dualităţii şi ai negaţiei. De aici putem considera că, în cazul unui sistem riguros dedicat dualităţii, noţiunea de predual poate fi omisă fiind înlocuită, conform formulei citate,

prin negația dualului sau prin dualul negației; reamintim echivalența, anterior discutată, dintre dualul negației şi negația dualului unei expresii. Ajunşi în acest punct al discuției, deci în momentul în care am obținut o matrice a operatorului $\triangleright$, putem renunța la noțiunea de predual, socotind acest concept numai ca o treaptă ajutătoare în mecanismul de clarificare a felului în care poate fi construită definiția matricială a operatorului $\triangleright$. Cu toate acestea, predualul unei expresii oarecare ar putea fi înțeles nu numai ca un pas, evidențiat doar din motive metodologice, ci şi ca un mijloc de a întregi analiza implicațiilor logice ale principiului dualității. Pentru moment vom lua un singur exemplu. Reamintim pentru aceasta, rolul important pe care l-a jucat în capitolul anterior noțiunea de negație a dualului unei formule. În baza formulei (22.8) știm că predualul unei formule oarecare este echivalent cu negația dualului său, cu dualul negației aceleiaşi expresii; pe baza formulei (22.9) am stabilit că predualul unei expresii este echivalent cu o altă expresie alcătuită din negațiile variabilelor propoziționale ale primei expresii, conectate între ele de operatorul (operatorii) expresiei inițiale. De aici putem conchide că, dualul negației unei expresii oarecare (sau negația dualului ei) poate fi redat direct prin simpla înlocuire a variabilelor componente ale acestei expresii cu negațiile lor. Această ultimă aserțiune poate fi socotită ca o completare adusă la chestiunea expresiilor armonic conjugate ale logicii standard.

3. PROPRIETĂȚILE OPERATORULUI $\triangleright$

Intenția primă, dacă ne referim la acest capitol, a fost aceea de a pune în evidență posibilitatea existenței unui operator $\triangleright$, care desemnează operația de dualizare și, în consecință, construirea matricii prin care acest operator este definit. După cum afirmam însă, la începutul acestui capitol, definirea prin intermediul tabelelor de adevăr a unui operator al unui calcul logic oarecare este legată de studierea, tot pe bază matricială, a proprietăților acelui operator și a legăturilor sale cu ceilalți operatori ai calculului.

În cazul operatorului $\triangleright$, parțial, aceste chestiuni au fost impuse chiar de construirea matricii prin care el se definește. Ca o consecință firească a acestei situații, o parte a acestor

aspecte sînt conținute în paragrafele anterioare. Dintre ele, cităm, caracterul monar al lui ▷, asemănările și deosebirile sale față de operatorul *N*. Revenind încă o dată, asupra acestor deosebiri, remarcăm faptul că ele nu se reduc la aceea că ▷ își subordonează, ca o condiție necesară a definirii sale, operatorul *N*. Mai mult, dacă proprietatea de a fi operator monar, în cazul lui *N*, avea drept consecință ștergerea, în sensul indicat, a diferențelor dintre o simplă variabilă propozițională și o formulă complexă, caracterul de a fi monar al lui ▷ implică, ca definitoriu pentru el, actul distincției variabilelor în starea unitară a formulei. Caracterul monar al lui ▷ implică distincția dintre nivelul variabilelor și nivelul formulei ca întreg, iar această distincție este operată prin intermediul negației. Dacă acest caracter al unui operator de a fi monar este o expresie a identității, atunci procedeul de construire a dualului este expresia interdependenței dintre actul de identificare și actul de distincție, de diferențiere. Caracterul monar al lui ▷ ca *identitate* se realizează prin actul de distincție, ca *diferență* și numai că se realizează, dar, diferența apare aici ca veritabil substrat, ca adevărată natură a identității.

Evident, avem în vedere aici o interpretare a operatorului ▷ în legătură cu principiul identității concrete, ca principiu al metalogicii filozofice [26 p. 223—262] și considerăm o astfel de interpretare adecvată nu numai datorită modului specific de constituire a dualului unei expresii date prin intermediul operatorului ▷, ci și faptului că operatorul ni se pare, ține de un tip superior de generalitate în raport cu clasa ce se compune din cei 17 operatori, bine cunoscuți, ai *CP*. În această perspectivă, un eventual sistem strict formal, avînd în operatorul ▷ un operator fundamental, își va subordona sistemele obișnuite ale *CP*, cel puțin din perspectiva dualizării.

Rațiunea primă a acestei idei, a faptului că ▷ ar ține de un nivel superior de generalizare, se află, în tabelul celor 16 operatori binari ai *CP*. După cum este cunoscut cel de al 17-lea operator al *CP*, operatorul *N*, apare nu într-o coloană specială a tabelului citat, ci am putea spune, în opt din cele 16 coloane ale tabelului. Revenind la tabelul nr. 1, este lesne de observat că, dacă primele 8 coloane, care formează prima jumătate a tabelului, sînt luate ca formații de bază, atunci fiecare din cele 8 coloane cuprinse în cea de a doua jumătate poate fi înțeleasă și ca negația coloanei simetrice, din prima

jumătate. Dacă comparăm acest tabel cu cel corespunzător înscrierii operatorilor duali în două coloane paralele, vom observa că, pentru descoperirea operatorului $\triangleright$ nu mai putem urma aceeași cale, ca în cazul operatorului N și nici măcar una asemănătoare și aceasta pentru simplul motiv că în tabelul citat, operatorul $\triangleright$ nici nu apare. E adevărat, în tabel apar operatorii duali, adică doar un efect al operatorului $\triangleright$, dar dacă în cazul anterior, efectul, existența unor formule ca negații ale altor formule, coincidea cu punerea în lumină a operatorului N, de data aceasta, existența de formule duale nu ne duce direct la definiția operatorului $\triangleright$.

Discuția din cadrul paragrafului anterior ne-a condus la o definiție a operatorului $\triangleright$, pe care în baza formulei (22.5) și a matricii (M. 22.3) o putem reformula prin expresia:

$$(23.1) \quad \triangleright \Phi^{n-1} pn \equiv N\Phi^{n-1} Npn$$

care poate fi considerată și ca exprimarea formală a enunțului din primul capitol prin care dualitatea era definită în termenii limbajului natural. La fel, formula (23.1) corespunde celei de a doua legi a dualității pe care o dă W. Quine. Formula (23.1) poate fi înțeleasă ca o definiție formală a operatorului $\triangleright$ prin intermediul negației. În consecință, fiecare din cei 16 operatori binari ai *CP*, cuprinși în tabelul nr. 1, poate fi obținut dintr-un alt operator, înscris în același tabel, aplicînd formulei constituită de acest operator operatorul $\triangleright$, sau, altfel spus, aplicînd formulei constituită de el operația de dualizare așa cum aceasta din urmă este denotată de formula (23.1).

În acest sens, în conformitate cu formula (22.6), în obținerea căreia formula (22.5) este implicată direct, iar definiția (23.1) este implicată indirect, valoarea de adevăr a dualului disjuncției este exprimabilă prin șirul:

$$s_1 = (1, 0, 0, 0)$$

Din tabelul nr. 2, care prezintă operatorii duali ai *CP*, rezultă că dualul disjuncției este conjuncția întrucît valoarea ei de adevăr este exprimabilă prin același șir s_1. În același fel, dacă punctul de plecare ar fi fost conjuncția, concluzia la care am fi ajuns ar fi fost că dualul conjuncției este disjuncția. Într-un mod cu totul analog putem proceda ca oricare din cei

16 operatori binari ai *CP* și bineînțeles, la fel putem proceda cu operatorul *N*.

Înainte însă de a ne ocupa de dualul unei formule alcătuită numai prin intermediul operatorului *N*, ceea ce este de fapt, echivalent cu a spune „dualul operatorului *N*", nu putem trece cu vederea un aspect ce ni se pare important, implicat în trecerea, prin intermediul operatorului $\triangleright$, de la disjuncție la conjuncție și invers. Exemplul folosit ne sugerează ideea că, dacă o formulă oarecare, să spunem $\Phi^{n-1}pn$ își află dualul în formula $\psi^{m-1}pm$, atunci, la rîndul ei, formula $\psi^{m-1}pm$ își află dualul în formula $\Phi^{n-1}pn$*. În cele ce urmează vom căuta să dovedim aserțiunea noastră.

Astfel, dacă dualul formulei $\Phi^{n-1}pn$ este formula $\psi^{m-1}pm$ atunci, în conformitate cu formula (22.1) înseamnă că dacă valoarea de adevăr a formulei $\Phi^{n-1}pn$ este exprimată de șirul:

$$s_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_{2^n-1}, v_{2^n})$$

atunci valoarea de adevăr a formulei $\psi^{m-1}pm$, în calitate de dual al formulei $\Phi^{n-1}pn$, va fi reprezentată de șirul:

$$s'_2 = (Nv_{2^n}, Nv_{2^n-1}, \ldots, Nv_2, Nv_1)$$

Acum, dacă dorim să obținem dualul formulei $\psi^{m-1}pm$, folosind procedeele cunoscute, vom avea ca dual al ei o formulă oarecare, să spunem $\Gamma^{k-1}pk$, a cărei valoare de adevăr va fi redată de șirul:

$$s_3 = (NNv_1, NNv_2, \ldots, NNv_{2^n-1}, NNv_{2^n})$$

care, pe baza legii dublei negații, devine:

$$s_3' = (v_1, v_2, \ldots v_{2^n-1}, v_{2^n})$$

Este însă evident că șirurile, s_2 — care definește valoarea formulei $\Phi^{n-1}pn$ și șirul s'_3 — care definește valoarea formulei $\Gamma^{k-1}pk$

* Menționăm că folosirea indicelui $n-1$ sau $m-1$ în scrierea formulelor *CP* are în vedere numai acele expresii alcătuite cu operatori binari. În cazul în care, expresia este alcătuită cu ajutorul unui operator monar, negația de exemplu, acest tip de indice dispare întrucît, în acest caz, numărul de apariții al operatorului, prevăzut de indicele în cauză, este egal cu numărul variabilelor propoziționale cuprinse în expresie.

sînt echivalente. De aici rezultă că formulele $\Phi^{n-1}pn$ şi $\Gamma^{k-1}pk$ sînt echivalente. Dar, cum s-a enunţat la început, formula $\Gamma^{k-1}pk$ este dualul formulei $\psi^{m-1}pm$ şi prin urmare, rezultă că dualul acestei ultime formule este de fapt prima formulă.

În consecinţă, putem susţine, drept lege logică, formula:

$$(23.2)\quad [\rhd \Phi^{n-1}pn \equiv \psi^{m-1}pm] \rightarrow [\rhd \psi^{m-1}pm \equiv \Phi^{n-1}pn]$$

Exact în acelaşi fel poate fi întemeiată şi reciproca acestei legi logice, adică formula:

$$(23.3)\quad [\rhd \psi^{m-1}pm \equiv \Phi^{n-1}pn] \rightarrow [\rhd \Phi^{n-1}pn \equiv \psi^{m-1}pm]$$

iar din formulele (23.2) şi (23.3), acceptînd definiţia echivalenţei printr-o implicaţie reciprocă, obţinem formula:

$$(23.4)\quad [\rhd \Phi^{n-1}pn \equiv \psi^{m-1}pm] \equiv [\rhd \psi^{m-1}pm \equiv \Phi^{n-1}pn]$$

Folosind un procedeu identic, se poate ilustra cu uşurinţă că dubla dualizare a unei formule oarecare are drept rezultat formula iniţială. Astfel, dacă formula iniţială este $\Phi^{n-1}pn$, iar şirul care o defineşte este şirul s_2, atunci $\rhd \rhd \Phi^{n-1}pn$ care reprezintă o formulă obţinută din prima prin dubla aplicare a operatorului $\rhd$, adică prin dublă dualizare, va fi definită printr-un şir identic cu şirul s_3, care, este echivalent cu şirul s'_3, care, la rîndul său, este echivalent cu şirul s_2, de unde rezultă formula:

$$(23.5)\quad \rhd \rhd \Phi^{n-1}pn \equiv \Phi^{n-1}pn$$

Formula (23.5) comparată cu formula care exprimă legea dublei negaţii:

$$(23.6)\quad NN\Phi_{i}^{n-1}pn \equiv \Phi^{n-1}pn$$

ne poate duce la concluzia că dubla dualizare ar fi echivalentă cu dubla negare:

$$(23.7)\quad \rhd \rhd \Phi^{n-1}pn \equiv NN\Phi^{n-1}pn$$

dar considerăm că această formulă (23.7) nu trebuie interpretată în sensul identităţii dintre operaţiile de dualizare şi de negare şi deci între operatorii $\rhd$ şi N, pentru motivul că aceste

două operații, aplicate aceleiași expresii a *CP*, într-o anumită situație, se dovedesc echivalente prin rezultatul lor. Două operații diferite prin natura lor pot duce la același rezultat, dar aceasta numai în anumite condiții de aplicare a lor. Deși asemănătoare sub unele aspecte, cele două operații și deci și operatorii corespunzători lor, diferă substanțial. De fapt, în baza definiției dualității acceptată de noi, formula (12.1) nu este o lege logică. Astfel, dacă reformulăm expresia (12.1) prin notația pe care o folosim în acest paragraf:

$$(23.8) \quad N\Phi^{n-1}pn \equiv \rhd \Phi^{n-1}pn$$

și dacă luăm în considerație că această formulă (23.8) nu este lege logică, vom ajunge la concluzia că reîntoarcerea la formula inițială prin dubla aplicare a operatorului $\rhd$ se face pe altă cale decît reîntoarcerea la expresia inițială prin dubla aplicare a operatorului *N*.

Considerăm că nu este necesar să insistăm asupra acestei chestiuni și că este suficient să amintim analiza întreprinsă pe parcursul primului capitol — în special paragraful (1.2) — analiză din care rezultă că aplicarea operației de dualizare asupra unei formule oarecare (o singură dată) este deosebită de aplicarea operației de negare asupra aceleiași formule (tot o singură dată). Cu toate acestea există o excepție și anume, cazul operatorilor înscriși de noi în clasa I. De fapt, formula (23.7) nu arată mai mult decît că doi operatori distincți, $\rhd$ și *N*, se bucură de aceeași proprietate. În plus, se știe că și alți operatori, avînd aceleași proprietăți, nu sînt prin aceasta identici. Cel mai clar exemplu îl constituie, probabil, perechea conjuncție-disjuncție. Ne-am oprit asupra acestei probleme mai ales în intenția de a sublinia încă o dată deosebirea dintre opinia acceptată și cea a lui I. Copi cu privire la definiția dualității. În pasajele următoare vom mai avea prilejul să aducem și alte elemente în favoarea distincției dualitate-negație. Pentru moment, reținem faptul că cei doi operatori analizați posedă și alte proprietăți similare.

Astfel, cea de a patra lege a dualității, enunțată de W. Quine și numită de Al. Church [12. p. 107] „principiul dualității pentru implicație", poate fi exprimată prin formula:

$$(23.9) \quad [\Phi^{n-1}pn \rightarrow \psi^{m-1}pm] \equiv [\rhd \psi^{m-1}pm \rhd \Phi^{n-1}pn]$$

Verificarea formulei (23.9) cu ajutorul metodei utilizate pînă acum ne duce la concluzia că ea este o lege logică. Dacă soluția expresiei $\Phi^{n-1}pn$ este reprezentată prin șirul (v_1, v_2, ..., v_{2^n-1},v_{2^n}), iar soluția formulei $\psi^{m-1}pm$ prin șirul (v'_1, v'_2, ... v'_{2^m-1}, v'_{2^m}) și dacă este dat prin ipoteză „$[\Phi^{n-1}pn \; \psi^{m-1}pm]$" ca lege logică, atunci este imposibil a găsi un singur caz în care pentru valoarea de adevăr *adevăr* din șirul (v_1, v_2, ... v_{2^n-1}, v'_{2^m}), care reprezintă soluția antecedentului, să corespundă valoarea de adevăr *fals* în șirul (v'_1, v'_2, ... v'_{2^m-1}, v'_{2^m}), care reprezintă valoarea de adevăr a consecventului. În cazul celui de al doilea membru al echivalenței denotată prin formula (23.9), implicația, „$[\rhd\psi^{m-1}pm \rightarrow \rhd\Phi^{n-1}pn]$" soluția lui $\rhd\psi^{m-1}pm$ este dată de șirul (Nv'_{2^m}, Nv'_{2^m-1},.... Nv'_2,Nv'_1), iar cea a lui $\rhd\Phi^{n-1}pn$ de șirul (Nv_{2^n}, Nv_{2^n-1}, ... Nv_2, Nv_1). Este ușor de observat inversarea produsă. În acest fel, putem spune că nici unei valori de adevăr *fals* din soluția lui $\rhd\Phi^{n-1}pn$ nu îi corespunde valoarea de adevăr *adevăr* în soluția lui $\rhd\psi^{m-1}pm$. Altfel spus, întrucît implicația ce constituie al doilea membru al echivalenței analizate, nu prezintă măcar un singur caz în care antecedentul ei (dualul consecventului din primul membru al echivalenței) să fie adevărat, iar consecventul (dualul antecedentului din primul membru al echivalenței) să fie fals, ea este lege logică. Prin aceasta, validitatea formulei (23.9) este pusă în evidență. Folosirea unei matrici complete în același scop ne-ar duce la aceeași concluzie, pe o cale însă mult mai complicată.

Dacă comparăm formula (23.9) cu formula:

$$(23.10)\quad [\Phi^{n-1}pn \rightarrow \psi^{m-1}pm] \equiv [N\psi^{m-1}pm \rightarrow N\Phi^{n-1}pn]$$

cunoscută și sub numele de „contrapoziția implicației", putem remarca, o dată în plus, faptul că operatorul $\rhd$ se bucură de proprietăți similare cu cele ale operatorului N.

Aceeași observație este jusitificată și de formula:

$$(23.11)\quad [\Phi^{n-1}pn \equiv \psi^{m-1}pm] \equiv [\rhd\Phi^{n-1}pn \equiv \rhd\psi^{m-1}pm]$$

care, cunoscută și sub numele de „principiul dualității pentru echivalență" [12 p. 108] întrucît prezintă un aspect al raportului dintre operatorul $\rhd$ și echivalență, este redată de W.

Quine drept a cincea lege a dualității. Evident, în cazul formulei (23.11) se are în vedere compararea ei cu formula:

$$(23.12)\quad [\Phi^{n-1}pn \equiv \psi^{m-1}pm] \equiv [N\Phi^{n-1}pn \equiv N\psi^{m-1}pm]$$

în conformitate cu care, echivalența a două formule este o lege logică, dacă și numai dacă negațiile lor sînt echivalente.

Revenind la formula (23.11), care poate fi citită în mod analog cu formula (23.12) cu singura deosebire că în cazul ei referința se va face la dualitate și nu la negație, caracterul ei de lege logică poate fi pus în evidență printr-un procedeu asemănător cu cel folosit în cazul formulei (23.9). Astfel, dacă echivalența dintre $\Phi^{n-1}pn$ și $\psi^{m-1}pm$ este dată prin ipoteză, rezultă că șirurile $(v_1, v_2, \ldots v_{2^n-1}, v_{2^n})$, care reprezintă valoarea de adevăr a lui $\Phi^{n-1}pn$ și $(v'_1, v'_2, \ldots, v'_{2^m-1}, v'_{2^m})$, care reprezintă valoarea de adevăr a lui $\psi^{m-1}pm$ sînt identice. În consecință, șirurile $(Nv_{2^n}, Nv_{2^n-1}, \ldots Nv_2, Nv_1)$, care reprezintă valoarea de adevăr a lui $\triangleright\Phi^{n-1}pn$ și $(Nv'_{2^m}, Nv'_{2^m-1} \ldots, Nv'_2, Nv'_1)$, care reprezintă valoarea de adevăr a lui $\triangleright\psi^{m-1}pm$ vor fi, în conformitate cu formulele (22.2) și (22.5) și cu matricea (M.22.3), la rîndul lor, identice. Rezultă că formula (23.11) este o lege logică. Ca și în cazul anterior, folosirea unei matrici complete ar duce la aceeași concluzie, pe o cale mai complicată.

Ultimele formule, dar nu numai ele, justifică observația anterioară după care operatorul $\triangleright$ are unele proprietăți asemănătoare cu proprietățile pe care noi le cunoaștem ca aparținînd și altor operatori ai *CP* din care negația ocupă primul lor. De altfel, chiar în formulele (23.9) și (23.11) legătura dintre dualitate și implicație, sau dintre dualitate și echivalență este analoagă celei care există între acești operatori binari ai *CP* și negație. Nu uităm, în acest sens, că formulele (23.9) și (23.11) au fost prezentate în comparație cu formulele (23.10) și (23.12) în care, în locul operatorului $\triangleright$, intervine operatorul *N*, în rest ele fiind identice.

În această ordine de idei, încercînd o apropiere și mai mare de legătura dintre dualitate și negație, reamintim analiza întreprinsă în primul capitol — paragraful (1.5) — în conformitate cu care formula:

$$(23.13)\quad N\triangleright\Phi^{n-1}pn \equiv \triangleright N\Phi^{n-1}pn$$

ar fi, la rîndul ei, o lege logică. Pentru a pune în evidență

adevărul acestei aserțiuni ne folosim în continuare de metoda instituită prin formulele (22.2) și (22.5) și prin matricea (M.22.3). Astfel, dacă soluția formulei $\Phi^{n-1}pn$ este reprezentată de șirul valorilor de adevăr $(v_1, v_2, \dots v_{2^n-1}, v_{2^n})$, atunci soluția lui $\rhd\Phi^{n-1}pn$ va fi reprezentată de șirul $(Nv_{2^n}, Nv_{2^n-1}, \dots Nv_2, Nv_1)$. După cum am stabilit anterior, negația unei formule poate fi redată prin șirul negațiilor valorilor de adevăr care formau soluția formulei inițiale. În consecință, șirul $(NNv_{2^n}, NNv_{2^n-1}, \dots, Nv_2v_2, NNv_1)$ va reprezenta soluția ce corespunde formulei $N\rhd\Phi^{n-1}pn$. Făcînd apel la legea dublei negații, rezultă că valoarea de adevăr a primului membru al echivalenței pe care o reprezintă formula (23.13) este desemnată de șirul $(v_{2^n}, v_{2^n-1}, \dots, v_2, v_1)$. Dacă luăm acum în considerație celălalt membru al echivalenței pe care o analizăm, constatăm, în baza premiselor asumate, că valoarea de adevăr a formulei $N\Phi^{n-1}pn$ este redată de șirul $(Nv_1, Nv_2, \dots, Nv_{2^n-1}, Nv_{2^n})$, iar soluția formulei $\rhd N\Phi^{n-1}pn$ este reprezentată de șirul $(NNv_{2^n}, NNv_{2^n-1}, \dots NNv_2, NNv_1)$, care, pe baza legii dublei negații devine $(v_{2^n}, v_{2^n-1}, \dots v_2, v_1)$. Prin aceasta, caracterul de lege logică al formulei (23.13) poate fi socotit ca dovedit.* Notăm cu acest prilej faptul că formula (23.13) ne sugerează o idee semnificativă privind legătura dintre dualitate și negație și anume că ordinea aplicării operației de dualizare și a celei de negare asupra unei formule oarecare este indiferentă. Formula (23.13) prezintă un fel de comutativitate a aplicabilității operatorilor considerați.

Un aspect semnificativ privind raportul dintre dualitate și negație îl constituie *teorema negației*, pe care B. Mates o include în capitolul dedicat, în lucrarea sa, meta-teoremelor [26 p. 130]. În conformitate cu această teoremă, așa cum am mai arătat, negația unei formule oarecare este echivalentă cu o nouă formulă în care operatorul expresiei inițiale a fost înlocuit prin dualul său, iar variabilele componente ale formulei inițiale au fost înlocuite prin negațiile lor. Această teoremă a negației este implicată în discuția de pînă acum, cel puțin

* În analiza formulei (23.13) noi am luat ca premise formulele (22.2), (22.5) și matricea (M. 22.3). La aceeași concluzie se poate ajunge însă și dacă folosim drept premisă noțiunea de predual, discutată în paragraful (2.2); în acest caz, analiza s-ar fi bazat numai pe matricea (M.22.3) căreia, eventual, i s-ar fi putut adăuga formula (22.8).

în sensul că, formulele pînă acum detectate ca legi logice sînt capabile să o producă. În acest sens, dacă pornim de la formula (23.13) și dacă primul termen al echivalenței pe care o reprezintă această formulă este înlocuit, în conformitate cu formula (22.8) prin echivalentul său ($\triangleright' \Phi^{n-1} pn$) și operăm în continuare un nou schimb de echivalențe pe baza formulei (22.9), obținem o nouă formulă:

$$(23.14)\quad \Phi^{n-1} Npn \equiv \triangleright N\Phi^{n-1} pn$$

care, în baza supoziției schimbului reciproc de echivalențe, poate fi socotită, la rîndul ei, o lege logică. Dar echivalența denotată de formula (23.14) fiind probată, putem accepta, luînd în considerație formula (23.11) — în conformitate cu care, dacă două expresii oarecare sînt echivalente, atunci sînt echivalente și dualele lor — formula:

$$(23.15)\quad \triangleright \Phi^{n-1} Npn \equiv \triangleright \triangleright N\Phi^{n-1} pn$$

de asemenea ca lege logică. La rîndul ei, formula (23.15) poate fi transformată, folosind din nou schimbul reciproc de echivalenți și bazîndu-ne pe formula (23.5) — după care dubla aplicare a operatorului $\triangleright$ asupra unei formule oarecare este echivalentă cu formula căreia i s-a aplicat dubla dualizare — obținînd, drept o nouă lege logică, expresia:

$$(23.16)\quad \triangleright \Phi^{n-1} Npn \equiv N\Phi^{n-1} pn$$

care reprezintă, de fapt, chiar teorema negației. Caracterul de lege logică al formulei (23.16) poate fi pus în evidență și prin intermediul procedeului anterior folosit. În acest sens, avem în vedere cele discutate anterior, valoarea de adevăr a expresiei $N\Phi^{n-1} pn$ este desemnată de șirul ($Nv_1, Nv_2, \ldots . Nv_{2^n-1}, Nv_{2^n}$), iar valoarea expresiei $\Phi^{n-1} Npn$ (vezi în acest sens formula (22.9) și matricea (M.22.3)) este dată de șirul ($v_{2^n}, v_{2^n-1}, \ldots v_2, v_1$). De asemenea, apelul la formulele (22.2), (22.5) și la matricea (M.22.3) ne duce la concluzia că valoarea de adevăr a expresiei $\triangleright \Phi^{n-1} Np^n$ este redată de șirul ($Nv_1, Nv_2, \ldots, Nv_{2^n-1}, Nv_{2^n}$), adică valoarea de adevăr a primului termen al echivalenței denotată de formula (23.16) este denotată de același șir care desemnează valoarea de adevăr a celui de al doilea membru al acestei echivalențe. În consecință, dacă două

expresii sînt echivalente, valorile lor de adevăr sînt identice, deci susținem, și pe această cale, caracterul de lege logică al formulei (23.16).

Formula (23.16) care redă, în contextul lucrării, teorema negației enunțată de B. Mates, ni se pare a avea o semnificație deosebită mai ales privitor la raportul dualitate-negație. Întrucît ne-am referit la o serie de aspecte legate tocmai de acest raport — ne gîndim în special la paragraful (2.1) — nu socotim necesar să insistăm acum prea mult asupra acestei chestiuni. Cu toate acestea, ne folosim de acest prilej pentru a nota încă o dată că formula (23.16) în acord cu definiția dualității acceptată de majoritatea logicienilor contemporani, de la care I. Copi se pare că face singura excepție, marchează diferența dintre dualitate și negație. Dacă am reveni, pentru moment, la terminologia utilizată în paragraful (1.2), am putea spune că negația unei formule oarecare nu este echivalentă cu dualul aceleiași formule, ci cu dualul predualului formulei considerate. Din cele prezentate atunci reiese că predualul unei expresii oarecare diferă atît față de expresia inițială, cît și față de dualul acesteia.

Marcarea netă a deosebirii dintre dual și negație, ca o consecință firească a felului în care dualitatea a fost definită în această lucrare — a se vedea formula (23.1) — poate fi făcută, o dată în plus, prin încercarea de a aplica operația de dualizare la *fbf* de extremă simplitate. Aceasta înseamnă, de fapt, a aplica operația dualizării asupra unei singure variabile propoziționale. Procedînd astfel, avem în vedere faptul că, întrucît analiza se situează la nivelul bivalenței, soluția înscrisă în matricea unei astfel de formule va cuprinde numai două cazuri. În consecință, dacă expresia considerată de noi ar fi alcătuită dintr-o singură variabilă propozițională, neafectată de negație, valoarea ei de adevăr va fi redată de șirul (v_1, v_2). În conformitate cu formulele (22.1), (22.5) și cu matricea (M.22.3), dualul acestei formule va avea valoarea de adevăr desemnată de șirul (Nv_2, Nv_1). Discuția noastră se plasează în cadrul bivalenței și prin urmare, în acest caz, $Nv_2 = v_1$, iar $Nv_1 = v_2$, de unde rezultă că șirurile mai sus considerate sînt echivalente. Pe baza celor constatate, se poate afirma că dualul unei formule de extremă simplitate, alcătuită dintr-o singură variabilă propozițională neafectată de negație, este echivalent cu formula inițială. Constatăm astfel un nou exem-

plu de auto-dual*. Să luăm un exemplu. Vom scrie în loc de $\Phi^{n-1}pn$ în mod simplu p. Folosim procedeul matricial:

p	$\triangleright p$	$p \equiv \triangleright p$
1	1	1
0	0	1

Matricea (M.23.1)

Putem constata că p este propriul său dual, așa cum a reieșit din analiza de mai sus.

Vom transfera acum discuția asupra unei alte *fbf* de maximă simplitate, care se deosebește de cea anterioară numai prin aceea că variabila individuală, care a stat în locul formulei $\Phi^{n-1}pn$, este, de această dată, afectată de negație. Concret, expresia noastră este Np. Prin urmare, dacă valoarea de adevăr a formulei p era redată de șirul (v_1, v_2), atunci valoarea de adevăr a formulei Np va fi reprezentată de șirul (Nv_1, Nv_2) sau, avînd în vedere cele anterior stabilite, de șirul (v_2, v_1). În acest context, valoarea de adevăr a expresiei $\triangleright Np$ — adică a dualului lui Np — va fi redată de șirul (NNv_2, NNv_1) sau de șirul (Nv_1, Nv_2), care, de fapt, descrie valoarea de adevăr a formulei Np. Și de această dată avem un exemplu de auto-dual: dualul lui Np este chiar Np însuși. Dacă revenim și în acest caz la procedeul matricial:

p	Np	$\triangleright Np$	$Np \equiv \triangleright Np$
1	0	0	1
0	1	1	1

Matricea (M. 23.2)

dobîndim o confirmare suplimentară a celor de mai sus.

* În această ordine de idei, reamintim operatorii înscriși în clasa III — paragraful (1.3).

Pînă în prezent, am constatat șase cazuri de expresii auto-duale și anume, în afara cazurilor mai sus discutate, cei patru operatori înscriși de noi în clasa III — paragraful (1.3). Dacă facem apel la acești patru operatori, atunci vom putea spune că orice *fbf* a *CP*, care pe calea definițiilor *CP* se poate reduce la unul din acești operatori, este o expresie auto-duală. Dacă însă, facem abstracție de acești patru operatori și dacă considerăm cazurile lui *p* și *Np* drept situații prea simple, atunci, așa cum arată W. Quine [33 p. 61], este destul de dificil de a găsi multe exemple de expresii autoduale. Între aceste puține cazuri el citează exemplul formulei *pq* v *pr* v *qr* ca fiind propriul său dual prin aceea că ea este echivalentă cu dualul ei explicit, adică cu formula *pvq·pvr·qvr*.

Dar, dincolo de numărul formulelor auto-duale, un alt lucru ni se pare deosebit de semnificativ. Revenind la modalitatea în care noi am definit dualitatea, urmînd concepția despre dualitate a lui W. Quine și implicit, credem, a majorității logicienilor, observăm cu acest prilej că, aplicarea definiției acceptată de noi, oricărui tip de *fbf* a *CP*, nu impune restricții sau abateri de la conținutul definiției inițiale. Nu revenim aici asupra restricțiilor pe care I. Copi însuși, uneori în mod surprinzător, le anunță pentru aplicarea definiției sale a dualității. Am dorit să subliniem aici doar faptul că definiția adoptată de noi conduce la o analiză coerentă a principiului dualității și credem că acest lucru va apărea și mai bine în lumină cînd, în paragrafele următoare, luînd formula (23.1) ca o definiție a operatorului $\triangleright$ în cazul *CP*, vom încerca să o extindem pentru nivelul *CF*, sau atunci cînd ne vom strădui să obținem o serie de teoreme ale dualității pe o cale strict formală. Ne permitem, pentru moment, a anticipa faptul că toate teoremele obținute de către I. Copi, pot fi obținute și de noi și nu ca teoreme ale negației, așa cum de fapt le-a obținut I. Copi, ci ca teoreme ale dualității.

Analiza operației de dualizare în cazul expresiilor auto-duale ne obligă a reveni la discuția noastră anterioară despre *predual*. Această completare a analizei anterioare este impusă de faptul că, în cazul formulelor autoduale, predualul apare a fi în raporturi oarecum noi, cel puțin față de formula inițială supusă operației de dualizare. Pentru a sugera direcția pe care o va avea discuția noastră, reamintim că nu înțelegem, în contextul lucrării, prin predual ($\triangleright'$) un alt operator logic,

așa cum am procedat cu dualul (▷). E firesc a înțelege prin predual numai un pas intermediar în mecanismul de construire a definiției matriciale a operatorului ▷. Procedeul de construire a matricii lui ▷ a fost fragmentat de noi, în mod intenționat, cu scopul de a face cît mai clară posibil construcția definiției matriciale a lui ▷ și tot în sens metodologic noi am mai revenit și revenim și acum asupra noțiunii de predual. În fond, ca simplu jalon pe drumul definirii dualului, predualul poate fi eliminat — prin asimilare, așa cum am mai arătat — odată ce drumul a devenit cunoscut. Cînd am analizat mecanismul de construire a matricii dualului, noi am fragmentat nu doar acest mecanism, dar, totodată, am fragmentat și tabelul de adevăr prin care se definește o *fbf* oarecare a *CP* și care de fapt este înțeles ca o matrice unitară. Această fragmentare a matricii s-a făcut în două părți: *baza matricii* (porțiunea în care, sub forma tuturor combinațiilor posibile, erau înscrise valorile de adevăr ale variabilelor propoziționale din expresia analizată) și *soluția matricii* (adică porțiunea în care erau înscrise valorile de adevăr care constituiau în totalitatea lor valoarea de adevăr a formulei analizate, pentru valorile de adevăr ale componentelor ei, înscrise în baza matricii). Cele două noțiuni, *baza matricii* și *soluția matricii*, apar a fi corelative, se presupun reciproc într-un act unitar: *matricea*. Dar pornind de la ideile lui Lesniewski, am considerat predualul ca rezultat al *rotirii soluției matricii* cu 180°, față de o axă perpendiculară prin centrul planului matricii. Această rotire a soluției matricii poate fi tradusă, într-un procedeu logic, substituind-o printr-o inversare a valorilor de adevăr din *baza matricii*, cu ajutorul negației. Urmînd definiția dualității adoptată de noi, obținerea dualului unei *fbf* oarecare, presupune, inversarea simultană, atît a valorilor de adevăr din *baza matricii*, cît și a celor din *soluția matricii*, ambele posibil de realizat cu ajutorul negației. Obținerea dualului unei expresii oarecare apare ca un proces unitar și continuu, care afectează în mod simultan părți diferite ale formulei supusă operației de dualizare. Pentru acest motiv considerăm posibilă, în obținerea dualului unei expresii oarecare, trecerea peste etapa predualului. Această idee este sugerată și de simplificarea matricii (M.22.3). Noi vom păstra, pentru moment, noțiunea de predual, în sensul precizat, pentru că această etapă în obținerea dualului ne permite desprinderea unor observații,

semnificative pentru scopul ce ni l-am propus în această lucrare.

Analiza operației de dualizare pentru cazul unor *fbf* de maximă simplitate — constituite dintr-o singură variabilă propozițională afectată sau nu de negație — a readus în discuție problema expresiilor autoduale. În legătură cu aceasta, ceea ce ne interesează aici este faptul că, în cazul lui p și al lui Np și prin generalizare, în cazul tuturor expresiilor autoduale, predualul este echivalent cu negația formulei inițiale. Pentru cazul lui p și Np, această aserțiune este înscrisă în formulele:

(23.17) $\rhd' p \equiv Np$

(23.18) $\rhd' Np \equiv p$

Prin generalizare, aceste formule au valabilitate pentru oricare din operatorii autoduali și de fapt, pentru orice expresie autoduală. Rezultă că, în cazul formulelor autoduale, predualul este echivalent cu negația formulei inițiale, iar dualul este echivalent cu formula inițială.

Prin urmare, în cazul formulelor autoduale, relația predual — dual rămîne nealterată, adică predualul rămîne echivalent cu negația dualului formulei inițiale și se poate deci conchide că mijlocul, anterior anunțat, de asimilare a noțiunii de predual prin intermediul operatorilor $\rhd$ și N, își păstrează și în această situație deplina valabilitate. Sub acest aspect, dacă am lua în considerație operatorii din prima clasă, adică aceia pentru care dualul coincide cu negația lor, am putea spune același lucru, căci în situația lor, predualul coincide cu formula inițială. Dar dacă raportul dintre predual și dual rămîne mereu același și, predualul poate fi tradus în termenii dualității și ai negației, înseamnă că atenția noastră trebuie să se îndrepte asupra definiției operatorului $\rhd$ și în special asupra formulei (23.1).

Din cele expuse pînă acum am văzut că definiția dualității acceptată de noi este aplicabilă în mod consecvent oricărui tip de *fbf* a logicii standard și a calculului asociat ei.* Dar tocmai în legătură cu acest fapt socotim necesară o observație.

* Avem în vedere că pînă în prezent noi ne-am referit, aproape exclusiv, doar la *CP*. Urmează ca într-un paragraf următor să indicăm căile de extindere a definiției denotată de formula (23.1) și pentru cazul *CF*.

Astfel, dacă raportăm formula (23.1) la oricare din cei 17 operatori ai *CP*, aplicabilitatea ei ca definiție a operatorului $\triangleright$ nu ridică nici un fel de obiecții. Cu totul alta, s-ar părea, ar fi situația formulelor auto-duale de maximă simplitate și în special aceea a unei singure variabile propoziționale, neafectată de negație. Noi am înțeles prin $\triangleright$ un operator care se aplică asupra altor operatori, în speță asupra operatorilor *CP*, în așa fel încît, operatorul asupra căruia el este aplicat se transformă într-un alt operator al *CP*, definibil și sub numele dualului celui dintîi.

Aplicarea operatorului $\triangleright$ asupra unei singure variabile propoziționale afectată de negație nu ridică probleme deosebite în legătură cu formula (23.1). Este suficient să nu mai ținem seamă de indicii „$n-1$" și „n", care apar în formula considerată drept definiție a operatorului $\triangleright$. Într-o astfel de situație, Φ va fi înțeles ca o variabilă operator care stă pentru N și în conformitate cu formula (23.1), avem:

$$(23.19) \quad \triangleright(N)p \equiv N(N)Np$$

în care litera N cuprinsă în paranteze este operatorul negație care a luat locul lui Φ din formula (23.1). Aplicînd în continuare legea dublei negații, formula (23.19) poate fi astfel modificată încît să arate în mod explicit că dualul lui Np este Np însuși.

Dacă luăm în considerație o singură variabilă propozițională, neafectată de negație, se pare că abordarea ei, cu ajutorul formulei (23.1) nu mai este la fel de simplă. Aceasta pentru că, în expresia p noi nu putem constata în mod direct existența unui operator al *CP*, care să fie substituit lui Φ din formul (23.1).

Definirea dualului unei simple variabile propoziționale prin intermediul formulei (23.1) nici nu se pune, decît în măsura în care simbolul p nu este considerat ca o simplă variabilă propozițională, ci ca o expresie a *CP*. Și, într-adevăr, în această aserțiune ne bazăm pe faptul că formula (23.1) este concepută ca definiție a operatorului $\triangleright$, atunci cînd acesta afectează expresii ale *CP* și nu simple variabile propoziționale, care luate de sine stătător, în mod absolut, nici nu au altă semnificație decît aceea de elemente constitutive ale formulelor *CP* și în această ultimă accepțiune nici nu se pune problema de a stabili care este dualul lor.

Pe de altă parte însă, simbolul p nu reprezintă numai o singură variabilă propozițională, ci el poate fi interpretat și ca o *fbf* a *CP*, într-un mod analog unei implicații, unei conjuncții etc. Am dori să ne referim la un singur exemplu, care completează această posibilitate de interpretare a lui p. Astfel, în sistemul *AN*, o expresie ca p este înțeleasă ca o formă normală conjunctivă perfectă, în sensul că, presupunînd proprietățile de idempotență ale conjuncției și disjuncției, p este o conjuncție cu un singur membru, care, la rîndul său, este o disjuncție cu un singur membru. În această perspectivă, aplicarea dualizării asupra lui p prin intermediul formulei (23.1) nu ar ridica nici o problemă decît aceea de a dezvolta, înainte de aplicarea formulei (23.1), pe baza proprietăților mai sus amintite, o conjuncție de disjuncție, sau o simplă conjuncție și de a reduce apoi, după aplicarea formulei (23.1), pe calea acelorași proprietăți, dualul obținut, din nou la p. În acest fel, problema aplicabilității formulei (23.1) pentru a afla pe baza ei dualul unei expresii cum ar fi p, este rezolvată.

Această procedură poate fi însă simplificată dacă acceptăm introducerea unei convenții care, adoptată, nu ar afecta cu nimic consistența CP. Astfel, putem presupune, în mod complementar față de existența negației, existența unui operator al afirmației care ar afecta în expresia p variabila propozițională p. Întrucît definiția unui asemenea operator ar consta în aceea că, aplicat unui enunț adevărat, ar avea drept rezultat o expresie adevărată și că, aplicat unui enunț fals ar avea drept rezultat o expresie falsă, scrierea lui explicită în fața variabilei p în cadrul formulei p nu este necesară. Dacă acceptăm această convenție, aplicarea formulei (23.1) asupra expresiei p pentru a afla dualul ei s-ar face în mod direct și ar fi exprimabilă prin formula:

$$(23.20) \quad \triangleright(+)\,p \equiv N(+)NP$$

în care semnul „(+)" ar reprezenta pretinsul operator al afirmației care stă în locul lui Φ din formula (23.1). Evident, aplicînd acum legea dublei negații și suprimînd scrierea așa-zisului „operator al afirmației", formula (23.20), ca aplicare concretă a formulei (23.1) asupra expresiei p, n-ar spune altceva decît că dualul lui p este p însuși. Avînd în vedere însă cele spuse mai sus, prezenta convenție poate fi eliminată ca

nefiind singura cale de a proba aplicabilitatea generală a formulei (23.1), înțeleasă ca definiție formală a operatorului $\triangleright$ prin intermediul negației.

Considerăm, în acest moment, încheiată discuția asupra definiției matriciale a operatorului $\triangleright$. O dată ce încercarea de a afla o definiție matricială a operatorului $\triangleright$, întreprindere echivalentă cu chiar justificarea posibilității de a concepe existența unui operator corespunzător operației de dualizare, a fost încheiată, se impune, în primă urgență, încercarea de a descoperi și de a întemeia, pe o cale strict formală, teoremele dualității.

III

TEOREMELE DUALITATII

Pentru a descoperi și a întemeia teoremele dualității, adică pentru a pune în lumină aspectele formale ale principiului dualității și a legăturilor dintre dualitate și alți operatori ai *CP* și în primul rînd, dintre dualitate și negație, vom încerca în cele ce urmează să procedăm pe calea unui sistem formal pe care îl vom numi ***sistemul dualității*** sau, pe scurt, „*S* ▷". Tocmai în acest scop socotim necesar a face, chiar de la început, unele precizări.

1. LIMBAJUL LUI S▷

Oprindu-ne mai întîi asupra limbajului pe care îl vom utiliza pentru desfășurarea, pe o cale formală, a teoremelor dualității, precizăm că operatorii monari corespunzători operațiilor de dualizare și de negare vor fi desemnați, ca și pînă acum, de literele mari ▷ și respectiv *N*, așezate în fața expresiei pe care o afectează — după modelul scrierii fără paranteze a lui J. Lukasiewicz.

Literele mari Φ, ψ, ... din alfabetul grec, stau pentru oricare din operatorii *CP* asociat logicii standard. În acest context, literele mari Φ, ψ, ..., pot fi înțelese drept variabile al căror domeniu de valori sînt operatorii înscriși în tabelul nr. 1, în mod explicit.

Gruparea grafică „*pn*" sau „*pm*" desemnează mulțimea variabilelor propoziționale legate de operatorul desemnat de Φ sau de ψ. În acest fel, dacă „*pi*" desemnează mulțimea varia-

bilelor propoziționale conectate de operatorul „Φ" în formula „$\Phi^{i-1}pi$", iar „pj" — mulțimea variabilelor propoziționale conectate de operatorul „ψ" în formula „$\psi^{j-1}pj$", atunci elementele mulțimii „pi" sînt membrii șirului „$(p_1, p_2, \ldots, p_n)$", iar elementele mulțimii „pj" sînt membrii șirului „$(p_1, p_2, \ldots p_m)$", astfel încît $2 \leqslant i \leqslant n$ și $2 \leqslant j \leqslant m$ și unde este posibil ca $n = m$.

Se poate considera că o secvență grafică de tipul $\Phi^{i-1}pi$ sau $\psi^{j-1}pj$, reprezintă o *fbf* pentru $S\triangleright$. În formulele considerate, indicii „$i - 1$" și respectiv „$j - 1$", desemnează numărul de apariții al operatorului pe care îl reprezintă Φ sau ψ. De exemplu, dacă pentru formula $\Phi^{i-1}pi$ $i=n$, atunci această formulă devine $\Phi^{n-1}pn$ și ea este alcătuită din n — variabile propoziționale conectate prin $n - 1$ — apariții ale operatorului Φ. O situație asemănătoare se realizează în cazul în care, în formula $\psi^{j-1}pj$, $j = m$*.

Acum, dacă $\Phi^{i-1}pi$ și $\psi^{j-1}pj$ sînt *fbf* ale $S\triangleright$, atunci $\triangleright\Phi^{i-1}pi$ și $\triangleright\psi^{j-1}pj$ sînt, la rîndul lor, *fbf* ale lui $S\triangleright$; în mod analog, formulele $N\Phi^{i-1}pi$ și $N\psi^{j-1}pj$ sînt, de asemenea, *fbf* ale lui $S\triangleright$.

Remarcăm, cu acest prilej, că simbolurile $\triangleright$ sau N apar de obicei în fața literelor mari Φ, ψ, ..., numărul lor de apariții putînd fi oricît de mare, dar nu nelimitat. Apariția lui $\triangleright$ în mod obișnuit numai în fața literelor mari Φ, ψ, ..., se datorește faptului că, în $S\triangleright$ operatorul $\triangleright$ este înțeles în continuare ca un operator monar, care, aplicat asupra altui operator obișnuit al *CP*, are drept efect transformarea expresiei alcătuită prin intermediul operatorului afectat într-o nouă formulă, duala celei dintîi. Evident, noi nu excludem construcții de tipul $\triangleright p$ sau Np. Pentru cazul formulei Np lucrurile par firești și nu presupun discuții suplimentare, cel puțin în

* După cum s-a precizat în cadrul *fbf* din $S\triangleright$, literele mari grecești Φ, ψ, ... stau pentru operatorii binari ai *CP*. În cazul în care Φ sau ψ ar sta, în aceste formule, pentru un operator monar, de exemplu pentru N, o secvență grafică de tipul $\Phi^{i-1}pi$ nu ar mai fi justificată ca *fbf* a lui $S\triangleright$; în această situație specială Φp ar lua locul lui $\Phi^{i-1}pi$ ca *fbf* a lui $S\triangleright$. Pentru a ocoli orice posibilitate de confuzie, vom preciza că atunci cînd într-o expresie a lui $S\triangleright$, variabila-operator este afectată de un indice de tipul „$i - 1$", respectiva variabilă-operator stă numai pentru un operator binar al *CP*.

situația în care formula Np nu este parte a unei expresii mai complexe. Pentru situația unor formule complexe precizăm că, așa după cum N„$\Phi^{i-1}pi$" este o *fbf* a lui $S\triangleright$ tot așa și $\Phi^{i-1}\ Npi$ este o *fbf* a lui $S\triangleright$. Adăugăm însă observația că plasarea lui N în fața lui pi în formula $\Phi^{i-1}\ Npi$ va fi înțeleasă în sensul că fiecare variabilă propozițională din mulțimea „pi" este afectată de negație. Altfel spus, dacă elementele mulțimii „pi" sînt membrii șirului $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, atunci elementele mulțimii „Npi" sînt identice cu membrii șirului $(Np_1, Np_2, \ldots, Np_n)$. În mod analog, pentru cazul formulei $\psi^{j-1}\ Npj$, elementele mulțimii „Npj" sînt reprezentate de membrii șirului $(Np_1, Np_2, \ldots . Np_m)$.

După cum am precizat mai sus, formule ca $\triangleright p$ nu sînt excluse din $S\triangleright$ ca nefiind *fbf*. Includerea acestui tip de expresii printre *fbf* ale lui $S\triangleright$ nu impune nici o modificare a înțelesului lui $\triangleright$ și prin aceasta reamintim discuția din finalul paragrafului (2.3) și concluziile la care am ajuns atunci. Notăm totuși că, formule de tipul $\triangleright p$ nu-și vor face apariția decît în cazul în care vom încerca o concretizare a teoremelor din $S\triangleright$ pentru un anumit grup de operatori ai *CP*.

În afară de operatorii $\triangleright$ și N, în $S\triangleright$ vom accepta și operatorul *echivalență*, acesta fiind cunoscut ca operator binar prin excelență. În cazul lui $S\triangleright$ el va fi înțeles ca funcționînd la același nivel de generalitate ca $\triangleright$. Cu scopul de a ușura citirea unor formule mai complicate, vom conveni ca, spre deosebire de operatorii monari $\triangleright$ și N, operatorul binar *echivalență* să fie scris după modelul clasic de scriere cu paranteze. În consecință, *echivalența* va fi desemnată de semnul „$\equiv$". Deci, vom putea spune că dacă „$\Phi^{i-1}pi$" și $\psi^{j-1}pj$ sînt două *fbf* ale lui $S\triangleright$, atunci „$\Phi^{i-1}pi \equiv \psi^{j-1}pj$" este o *fbf* a lui $S\triangleright$.

Ca o consecință imediată a folosirii sistemului de scriere cu paranteze, sîntem nevoiți să introducem grupările (,) și [,]—care desemnează tipurile de paranteze utilizate în $S\triangleright$. Prin urmare, dacă „$\Phi^{i-1}pi \equiv \psi^{j-1}pj$" și „$\triangleright\Phi^{i-1}pi \equiv \triangleright\psi^{j-1}pj$" sînt două *fbf* în $S\triangleright$, atunci „$[\Phi^{i-1}pi \equiv \psi^{j-1}pj] \equiv [\triangleright\Phi^{i-1}pi \equiv$ $\equiv \triangleright\psi^{j-1}pj]$", constituie o *fbf* în $S\triangleright$.

Ca reguli de deducție în $S\triangleright$ vom folosi, în primul rînd, *substituția* și *detașarea* (*modus ponens*). În legătură cu modul de funcționare a substituției în $S\triangleright$, credem că este necesar să

facem unele precizări. În mod obişnuit, aşa cum se poate remarca cu uşurinţă la nivelul *CP*, substituţia funcţionează sub anumite restricţii, printre care notăm:

(a) Substituţia se operează numai în scheme valide;

(b) Prin substituţie se operează numai înlocuirea unor variabile propoziţionale, fiecare reprezentată printr-un simbol individual, cu alte variabile propoziţionale sau cu alte *fbf* ale sistemului;

(c) Substituţia se operează astfel încît, dacă o anume variabilă propoziţională, din cadrul unei scheme logice valide, a fost înlocuită cu o *fbf* oarecare, atunci această variabilă propoziţională va fi înlocuită cu aceeaşi *fbf*, ori de cîte ori ea apare în cuprinsul schemei logice considerate.

În $S\triangleright$ substituţia îşi păstrează întocmai toate aceste caracteristici sau, altfel spus, substituţia este supusă aceloraşi restricţii. Cu toate acestea, se impun o serie de explicitări suplimentare, în special pentru restricţia (*b*). De data aceasta nu se va mai putea spune că substituţia se va opera, în mod exclusiv, numai asupra variabilelor propoziţionale şi aceasta, în primul rînd, pentru simplul motiv că în $S\triangleright$ variabilele propoziţionale nu apar în mod direct. În al doilea rînd, literele mari Φ, ψ, ..., din alcătuirea *fbf* ale lui $S\triangleright$, apar ele însele ca variabile, e adevărat, pentru operatorii binari ai *CP*, dar într-un mod asemănător variabilelor propoziţionale. În sfîrşit, interesul nostru pentru dualitate face ca atenţia să fie îndreptată asupra formulei ce urmează după operatorul $\triangleright$, adică asupra unei expresii ca $\Phi^{n-1}pn$ sau $\psi^{m-1}pm$, care apar a fi formule de bază în $S\triangleright$ — un fel de caz minim din punctul de vedere al complexităţii lor de alcătuire. În consecinţă, în $S\triangleright$ substituţia se aplică şi asupra acestor formule de bază, fiecare din ele putînd fi înlocuită prin substituţie cu o *fbf* oarecare din $S\triangleright$ şi respectînd, evident, toate celelalte condiţii cerute de regula substituţiei.

În ceea ce priveşte numărul regulilor de deducţie din $S\triangleright$, noi ne vom asuma la început, în afară de substituţie şi detaşare, acele reguli care ţin în mod nemijlocit de utilizarea în actul deducţiei a operatorului „$\equiv$", dar pe măsură ce vom fi descoperit noi teoreme, în măsura în care vor fi necesare noi reguli de deducţie, vom formula şi altele, pe baza teoremelor deja probate, într-o manieră de mult devenită familiară.

Pornind de la faptul că, în $S\triangleright$ operatorul „$\equiv$" este folosit în actul deductiv, se impune o ultimă precizare, şi anume, *regula modul ponens* (detaşarea) va primi o formulare adecvată utilizării echivalenţei în actul deductiv.

2. TEOREMELE LUI $S\triangleright$

Presupunem că precizările de pînă acum sînt suficiente şi deci putem trece la prezentarea încercărilor noastre de a întemeia, pe o cale strict formală, teoremele dualităţii şi ale relaţiei dualitate-negaţie. În acest sens, vom considera expresiile:

$$(32.1)\quad [\triangleright\Phi^{n-1}pn \equiv \psi^{m-1}pm] \equiv [\Phi^{n-1}pn \equiv \triangleright\psi^{m-1}pm]$$

$$(32.2)\quad [N\Phi^{n-1}pn \equiv \psi^{m-1}pm] \equiv [\Phi^{n-1}pn \equiv N\psi^{m-1}pm]$$

$$(32.3)\quad [\Phi^{n-1}pn \equiv \Phi^{n-1}pn]$$

drept expresii prime, indemonstrabile în $S\triangleright$. În acelaşi timp, ne asumăm formula:

$$(32.4)\quad \triangleright\Phi^{n-1}pn \equiv dfN\Phi^{n-1}Npn$$

drept definiţie a operatorului $\triangleright$, în $S\triangleright$*. Regulile lui $S\triangleright$ sînt:

(R_1) = substituţia: X/Y = X se substituie prin Y

$(R_2) = \dfrac{X,\ X \equiv Y}{Y}$ = modus ponens (regula detaşării)

$(R_3) = \dfrac{X \equiv Y}{Y \equiv X}$ = comutativitatea echivalenţei

$(R_4) = \dfrac{X \equiv Y,\ Y \equiv Z}{X \equiv Z}$ = tranzitivitatea echivalenţei.

Pe baza axiomelor, a definiţiei şi a regulilor asumate, teoremele dualităţii rezultă după cum urmează:

$(32.1):\ \psi^{m-1}pm/\triangleright\Phi^{n-1}pn \times (R_3) =$
$(32.3)\Phi^{n-1}pn/\triangleright\Phi^{n-1}pn \times (R_2) - 32.5$

$$(32.5)\quad \triangleright\triangleright\Phi^{n-1}pn \equiv \Phi^{n-1}pn$$

* Notăm că formula (32.1) este o retranscriere a formulei (23.4); la fel, definiţia (32.4) este o reluare a expresiei (23.1). În acelaşi sens, formula (32.2) apare ca o variantă a formulei (23.12).

Teorema (32.5) ne permite formularea regulei:

$(R_5) = \frac{\triangleright\triangleright X}{X}$

(32.1): $\Phi^{n-1}pn/N\Phi^{n-1}pn$ — (32.6)

(32.6) $[\triangleright N\Phi^{n-1}pn \equiv \psi^{m-1}pm] \equiv [N\Phi^{n-1}pn \equiv \triangleright\psi^{m-1}pm]$

(32.2): $\Phi^{n-1}pn/\triangleright\Phi^{n-1}pn$ — (32.7)

(32.7) $[N\triangleright\Phi^{n-1}pn \equiv \psi^{m-1}pm] \equiv [\triangleright\Phi^{n-1}pn \equiv N\Phi^{n-1}pn]$

(32.1): $\Phi^{n-1}pn/\triangleright\Phi^{n-1}pn \times (R_5)$ — (32.8)

(32.8) $[\Phi^{n-1}pn \equiv \psi^{m-1}pm] \equiv [\triangleright\Phi^{n-1}pn \equiv \triangleright\psi^{m-1}pm]$

(32.8): $\psi^{m-1}pm/\Phi^{n-1}pn = (32.3) \times (R_2)$ — (32.9)

(32.9) $\triangleright\Phi^{n-1}pn \equiv \triangleright\Phi^{n-1}pn$

(32.2): $\Phi^{m-1}pm/N\Phi^{n-1}pn \times (R_3) = (32.3)\,\Phi^{n-1}pn/N\Phi^{n-1}pn \times$
$\times (R_2)$—(32.10)

(32.10) $NN\Phi^{n-1}pn \equiv \Phi^{n-1}pn$

Pe baza teoremei (32.10) rezultă regula:

$(R_6)\ \frac{NNX}{X}$

(32.5), (32.10) $\times (R_3) \times (R_4) =$ (32.11)

(32.11) $\triangleright\triangleright\Phi^{n-1}pn \equiv NN\Phi^{n-1}pn$

(32.2): $\Phi^{n-1}pn/N\Phi^{n-1}pn \times (R_6) =$ (32.12)

(32.12) $[\Phi^{n-1}pn \equiv \psi^{m-1}pm] \equiv [N\Phi^{n-1}pn \equiv N\psi^{m-1}pm]$

(32.12): $\psi^{m-1}pm/\Phi^{n-1}pn = (32.3) \times (R_2)$ — (32.13)

(32.13) $N\Phi^{n-1}pn \equiv N\Phi^{n-1}pn$

(32.1): $\psi^{m-1}pm/N\Phi^{n-1}\,Npn = (32.4) \times (R_2)$ — (32.14)

(32.14) $\Phi^{n-1}pn \equiv \triangleright N\Phi^{n-1}\,Npn$

(32.12): $\psi^{m-1}pm/\triangleright N\Phi^{n-1}\,Npn = (32.14) \times (R_2)$ — (32.15)

(32.15) $N\Phi^{n-1}pn \equiv N\triangleright N\Phi^{n-1}\,Npn$

(32.15): $\Phi^{n-1}pn/\Phi^{n-1}\,Npn \times (R_6) \times (32.4) =$ (32.16)

(32.16) $\triangleright\Phi^{n-1}pn \equiv N\triangleright N\Phi^{n-1}pn$

(32.10): $\Phi^{n-1}pn / \triangleright \Phi^{n-1}pn \times (R_3) = (32.17)$

(32.17) $\triangleright \Phi^{n-1}pn \equiv NN \triangleright \Phi^{n-1}pn$

(32.2): $\Phi^{n-1}pn / \triangleright \Phi^{n-1}pn, \psi^{m-1}pm / NN\Phi^{n-1}pn = (32.11) \times (R_2) - (32.18)$

(32.18) $\triangleright \Phi^{n-1}pn \equiv \triangleright NN\Phi^{n-1}pn$

(32.16), (32.17) $\times (R_3) \times (R_4) = (32.18.1)$

(32.18.1) $NN \triangleright \Phi^{n-1}pn \equiv N \triangleright N\Phi^{n-1}pn$

(32.16), (32.18) $\times (R_3) \times (R_4) = (32.18.2)$

(32.18.2) $N \triangleright N\Phi^{n-1}pn \equiv \triangleright NN\Phi^{n-1}pn$

(32.17), (32.18) $\times (R_3) \times (R_4) = (32.18.3)$

(32.18.3) $NN \triangleright \Phi^{n-1}pn \equiv \triangleright NN\Phi^{n-1}pn$

(32.15), (32.18.2) $\Phi^{n-1}pn / \Phi^{n-1} Npn \times (R_6) \times \times (R_4) \Phi^{n-1}pn / \Phi^{n-1} Npn = (32.19)$

(32.19) $N\Phi^{n-1}pn \equiv \triangleright \Phi^{n-1} Npn$

(32.7): $\Phi^{n-1}pn / N\Phi^{n-1}pn, \quad \psi^{m-1}pm / \triangleright \Phi^{n-1}pn = (32.16) \times \times (R_3) \times (R_2) - (32.20)$

(32.20) $\triangleright N\Phi^{n-1}pn \equiv N \triangleright \Phi^{n-1}pn$

Pe baza teoremei (32.20) putem formula regula:

$$(R_7)' = \frac{\triangleright N X}{N \triangleright X} \text{ și } (R_7)'' = \frac{N \triangleright X}{\triangleright N X}$$

(32.6), (32.7) $\times (R_7) \times (R_3) \times (R_4) = (32.21)$

(32.21) $[N\Phi^{n-1}pn \equiv \triangleright \psi^{m-1}pm] \equiv [\triangleright \Phi^{n-1}pn \equiv N\psi^{m-1}pm]$

(32.14): $\Phi^{n-1}pn / \Phi^{n-1} Npn \times (R_6) = (32.22)$

(32.22) $\Phi^{n-1} Npn \equiv \triangleright N\Phi^{n-1}pn$

(32.22) $\times (R_7) = (32.22.1)$

(32.22.1) $\Phi^{n-1} Npn \equiv N \triangleright \Phi^{n-1}pn$

(32.2): $\Phi^{n-1}pn / N\Phi^{n-1}pn, \quad \psi^{m-1}pm / \triangleright \triangleright \Phi^{n-1}pn = (32.11) \times \times (R_3) \times (R_2) - (32.23)$

(32.23) $N\Phi^{n-1}pn \equiv N \triangleright \triangleright \Phi^{n-1}pn$

(32.6): $\Phi^{n-1}pn / N\Phi^{n-1}pn \times (R_3) = (32.24)$

(32.24) $N\Phi^{n-1}pn \equiv \triangleright\triangleright N\Phi^{n-1}pn$

(32.1): $\Phi^{n-1}pn/N\Phi^{n-1}pn,\ \psi^{m-1}pm/N\triangleright\Phi^{n-1}pn$ = (32.20) × × (R_2) — (32.25)

(32.25) $N\Phi^{n-1}pn \equiv \triangleright N\triangleright\Phi^{n-1}pn$

(32.23), (32.24) × (R_3) × (R_4) = (32.25.1)

(32.25.1) $N\triangleright\triangleright\Phi^{n-1}pn \equiv \triangleright\triangleright N\Phi^{n-1}pn$

(32.23), (32.24) × (R_3) × (R_4) = (32.25.2)

(32.25.2) $N\triangleright\triangleright\Phi^{n-1}pn \equiv \triangleright N\triangleright\Phi^{n-1}pn$

(32.24), (32.25) × (R_3) × (R_4) = (32.25.3)

(32.25.3) $\triangleright\triangleright N\Phi^{n-1}pn \equiv \triangleright N\triangleright\Phi^{n-1}pn$

(32.16): $\Phi^{n-1}pn/\triangleright\Phi^{n-1}pn$ × (R_5) = (32.26)

(32.26) $\Phi^{n-1}pn \equiv N\triangleright N\triangleright\Phi^{n-1}pn$

(32.1): $\psi^{m-1}pm/N\triangleright N\Phi^{n-1}pn$ = (32.16) × (R_2) — (32.27)

(32.27) $\Phi^{n-1}pn \equiv \triangleright N\triangleright N\Phi^{n-1}pn$

(32.17): $\Phi^{n-1}pn/\triangleright\Phi^{n-1}pn$ × (R_5) = (32.28)

(32.28) $\Phi^{n-1}pn \equiv NN\triangleright\triangleright\Phi^{n-1}pn$

(32.18): $\Phi^{n-1}pn/\triangleright\Phi^{n-1}pn$ × (R_5) = (32.29)

(32.29) $\Phi^{n-1}pn \equiv \triangleright NN\triangleright\Phi^{n-1}pn$

(32.23): $\Phi^{n-1}pn/N\Phi^{n-1}pn$ × (R_6) = (32.30)

(32.30) $\Phi^{n-1}pn \equiv N\triangleright\triangleright N\Phi^{n-1}pn$

(32.24): $\Phi^{n-1}pn/N\Phi^{n-1}pn$ × (R_6) = (32.31)

(32.31) $\Phi^{n-1}pn \equiv \triangleright\triangleright NN\Phi^{n-1}pn$

(32.26), (32.27) × (R_3) × (R_4) = (32.31.1)

(32.31.1) $N\triangleright N\triangleright\Phi^{n-1}pn \equiv \triangleright N\triangleright N\Phi^{n-1}pn$

(32.26), (32.28) × (R_3) × (R_4) = (32.31.2)

(32.31.2) $N\triangleright N\triangleright\Phi^{n-1}pn \equiv NN\triangleright\triangleright\Phi^{n-1}pn$

(32.26), (32.29) × (R_3) × (R_4) = (32.31.3)

(32.31.3) $N\triangleright N\triangleright\Phi^{n-1}pn \equiv \triangleright NN\triangleright\Phi^{n-1}pn$

(32.26), (32.30) $\times$ (R_3) $\times$ (R_4) = (32.31.4)

(32.31.4) $N \triangleright N \triangleright \Phi^{n-1} pn \equiv N \triangleright \triangleright N \Phi^{n-1} pn$

(32.26), (32.31) $\times$ (R_3) $\times$ (R_4) = (32.31.5)

(32.31.5) $N \triangleright N \triangleright \Phi^{n-1} pn \equiv \triangleright \triangleright NN \Phi^{n-1} pn$

(32.27), (32.28) $\times$ (R_3) $\times$ (R_4) = (32.31.6)

(32.31.6) $\triangleright N \triangleright N \Phi^{n-1} pn \equiv NN \triangleright \triangleright \Phi^{n-1} pn$

(32.27), (32.29) $\times$ (R_3) $\times$ (R_4) = (32.31.7)

(32.31.7) $\triangleright N \triangleright N \Phi^{n-1} pn \equiv \triangleright NN \triangleright \Phi^{n-1} pn$

(32.27), (32.30) $\times$ (R_3) $\times$ (R_4) = (32.31.8)

(32.31.8) $\triangleright N \triangleright N \Phi^{n-1} pn \equiv N \triangleright \triangleright N \Phi^{n-1} pn$

(32.27), (32.31) $\times$ (R_3) $\times$ (R_4) = (32.31.9)

(32.31.9) $\triangleright N \triangleright N \Phi^{n-1} pn \equiv \triangleright \triangleright NN \Phi^{n-1} pn$

(32.28), (32.29) $\times$ (R_3) $\times$ (R_4) = (32.31.10)

(32.31.10) $NN \triangleright \triangleright \Phi^{n-1} pn \equiv \triangleright NN \triangleright \Phi^{n-1} pn$

(32.28), (32.30) $\times$ (R_3) $\times$ (R_4) = (32.31.11)

(32.31.11) $NN \triangleright \triangleright \Phi^{n-1} pn \equiv N \triangleright \triangleright N \Phi^{n-1} pn$

(32.28), (32.31) $\times$ (R_3) $\times$ (R_4) = (32.31.12)

(32.31.12) $NN \triangleright \triangleright \Phi^{n-1} pn \equiv \triangleleft \triangleleft NN \Phi^{n-1} pn$

(32.29), (32.30) $\times$ (R_3) $\times$ (R_4) = (32.31.13)

(32.31.13) $\triangleright NN \triangleright \Phi^{n-1} pn \equiv N \triangleright \triangleright N \Phi^{n-1} pn$

(32.29), (32.31) $\times$ (R_3) $\times$ (R_4) = (32.31.14)

(32.31.14) $\triangleright NN \triangleright \Phi^{n-1} pn \equiv \triangleright \triangleright NN \Phi^{n-1} pn$

(32.30), (32,31) $\times$ (R_3) $\times$ (R_4) = (32.31.15)

(32.31.15) $N \triangleright \triangleright N \Phi^{n-1} pn \equiv \triangleright \triangleright NN \Phi^{n-1} pn$

În precedentul capitol (paragraful (2.3), discuția întreprinsă asupra *operatorului* $\triangleright$ și asupra relațiilor dintre el și alți operatori ai *CP*, ne-a condus la o serie de formule care, cu o singură excepție — ne gîndim la acele expresii care prezintă importanță din perspectiva operatorului $\triangleright$ și a relațiilor sale cu alți operatori — au putut fi întemeiate în totalitatea lor, pe o cale strict formală în cadrul lui $S\triangleright$. Excepția la care ne referim și asupra căreia vom reveni mai tîrziu, este constituită de formula (23.9). Dată fiind asertiunea de mai sus, socotim că exemplele de pînă acum sînt suficiente. Eventuale alte teoreme și reguli derivabile din ele ar urma să fie întemeiate într-un mod cu totul analog. Ceea ce ni se pare că se impune acum, în mod imediat, este a testa consistența sistemului $S\triangleright$.

3. CONSISTENȚA SISTEMULUI $S\triangleright$

Prin testarea consistenței lui $S\triangleright$ înțelegem, în primul rînd, a verifica dacă sistemul alcătuit de noi se bucură de proprietățile clasice ale unui sistem axiomatic corect construit.

Prima dintre aceste proprietăți este cea cunoscută sub numele de *independența axiomelor*. Pentru aceasta, urmînd o cale devenită clasică, am alcătuit un model de interpretare bazat pe trei valori: 1, 2, 3. În cadrul acestui model de interpretare convenim ca literele mari *X*, *Y*, ..., să desemneze formulele de bază din $S\triangleright$, $\Phi^{n-1}pn$, $\psi^{m-1}pm$,. . . .

Pentru prima axiomă a lui $S\triangleright$, expresia (32.1), modelul de interpretare se concretizează prin următoarele matrici:

X	NX
1	3
2	3
3	1

(M. 33.1)

X	$\triangleright X$
1	1
2	3
3	3

(M. 33.2)

$X \equiv Y$	1	2	3
1	1	1	3
2	2	1	3
3	3	3	1

(M. 33.3)

Vom interpreta fiecare din axiomele lui $S\triangleright$ pe baza matricilor de mai sus.

Expresia (32.1):

$$[\triangleright 1 \equiv 1] \equiv [1 \equiv \triangleright 1] = [1 \equiv 1] \equiv [1 \equiv 1] = [1 \equiv 1] = 1$$
$$[\triangleright 1 \equiv 2] \equiv [1 \equiv \triangleright 2] = [1 \equiv 2] \equiv [1 \equiv 3] = [1 \equiv 3] = 3$$
$$[\triangleright 1 \equiv 3] \equiv [1 \equiv \triangleright 3] = [1 \equiv 3] \equiv [1 \equiv 3] = [3 \equiv 3] = 1$$
$$[\triangleright 2 \equiv 1] \equiv [2 \equiv \triangleright 1] = [3 \equiv 1] \equiv [2 \equiv 1] = [3 \equiv 2] = 3$$
$$[\triangleright 2 \equiv 2] \equiv [2 \equiv \triangleright 2] = [3 \equiv 2] \equiv [2 \equiv 3] = [3 \equiv 3] = 1$$
$$[\triangleright 2 \equiv 3] \equiv [2 \equiv \triangleright 3] = [3 \equiv 3] \equiv [2 \equiv 3] = [1 \equiv 3] = 3$$
$$[\triangleright 3 \equiv 1] \equiv [3 \equiv \triangleright 1] = [3 \equiv 1] \equiv [3 \equiv 1] = [3 \equiv 3] = 1$$
$$[\triangleright 3 \equiv 2] \equiv [3 \equiv \triangleright 2] = [3 \equiv 2] \equiv [3 \equiv 3] = [3 \equiv 1] = 3$$
$$[\triangleright 3 \equiv 3] \equiv [3 \equiv \triangleright 3] = [3 \equiv 3] \equiv [3 \equiv 3] = [1 \equiv 1] = 1$$

Expresia (32.2)

$$[N1 \equiv 1] \equiv [1 \equiv N1] = [3 \equiv 1] \equiv [1 \equiv 3] = [3 \equiv 3] = 1$$
$$[N1 \equiv 2] \equiv [1 \equiv N2] = [3 \equiv 2] \equiv [1 \equiv 3] = [3 \equiv 3] = 1$$
$$[N1 \equiv 3] \equiv [1 \equiv N3] = [3 \equiv 3] \equiv [1 \equiv 1] = [1 \equiv 1] = 1$$
$$[N2 \equiv 1] \equiv [2 \equiv N1] = [3 \equiv 1] \equiv [2 \equiv 3] = [3 \equiv 3] = 1$$
$$[N2 \equiv 2] \equiv [2 \equiv N2] = [3 \equiv 2] \equiv [2 \equiv 3] = [3 \equiv 3] = 1$$
$$[N2 \equiv 3] \equiv [2 \equiv N3] = [3 \equiv 3] \equiv [2 \equiv 1] = [1 \equiv 2] = 1$$
$$[N3 \equiv 1] \equiv [3 \equiv N1] = [1 \equiv 1] \equiv [3 \equiv 3] = [1 \equiv 1] = 1$$
$$[N3 \equiv 2] \equiv [3 \equiv N2] = [1 \equiv 2] \equiv [3 \equiv 3] = [1 \equiv 1] = 1$$
$$[N3 \equiv 3] \equiv [3 \equiv N3] = [1 \equiv 3] \equiv [3 \equiv 1] = [3 \equiv 3] = 1$$

Expresia (32.3)

$$[1 \equiv 1] = 1$$
$$[2 \equiv 2] = 1$$
$$[3 \equiv 3] = 1$$

Se poate observa cu ușurință că interpretarea axiomelor lui $S \triangleright$ în baza matricilor (M.33.1), (M.33.2) și (M.33.3), care concretizează modelul ales de noi pentru cazul axiomei (32.1), a avut drept rezultat aceeași valoare — 1 — pentru orice interpretare dată axiomelor (32.2) și (32.3), dar în cazul axiomei (32.1) am constatat, pentru anumite interpretări, prezența unei alte valori — 3. În acest sens, putem considera axioma (32.1) drept independentă.

Pentru a pune în evidență independența axiomei (32.2), vom concretiza modelul nostru prin matricile:

X	NX
1	3
2	2
3	1

(M. 33.4)

X	$\triangleright X$
1	1
2	2
3	3

(M. 33.5)

$X \equiv Y$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	1	3
3	3	3	1

(M. 33.6)

Procedăm ca mai sus, deci:

Expresia (32.1)

$$[\triangleright 1 \equiv 1] \equiv [1 \equiv \triangleright 1] = [1 \equiv 1] \equiv [1 \equiv 1] = [1 \equiv 1] = 1$$
$$[\triangleright 1 \equiv 2] \equiv [1 \equiv \triangleright 2] = [1 \equiv 2] \equiv [1 \equiv 2] = [2 \equiv 2] = 1$$
$$[\triangleright 1 \equiv 3] \equiv [1 \equiv \triangleright 3] = [1 \equiv 3] \equiv [1 \equiv 3] = [3 \equiv 3] = 1$$
$$[\triangleright 2 \equiv 1] \equiv [2 \equiv \triangleright 1] = [2 \equiv 1] \equiv [2 \equiv 1] = [2 \equiv 2] = 1$$
$$[\triangleright 2 \equiv 2] \equiv [2 \equiv \triangleright 2] = [2 \equiv 2] \equiv [2 \equiv 2] = [1 \equiv 1] = 1$$
$$[\triangleright 2 \equiv 3] \equiv [2 \equiv \triangleright 3] = [2 \equiv 3] \equiv [2 \equiv 3] = [3 \equiv 3] = 1$$
$$[\triangleright 3 \equiv 1] \equiv [3 \equiv \triangleright 1] = [3 \equiv 1] \equiv [3 \equiv 1] = [3 \equiv 3] = 1$$
$$[\triangleright 3 \equiv 3] \equiv [3 \equiv \triangleright 2] = [3 \equiv 2] \equiv [3 \equiv 2] = [3 \equiv 3] = 1$$
$$[\triangleright 3 \equiv 3] \equiv [3 \equiv \triangleright 3] = [3 \equiv 3] \equiv [3 \equiv 3] = [1 \equiv 1] = 1$$

Expresia (32.2)

$$[N1 \equiv 1] \equiv [1 \equiv N1] = [3 \equiv 1] \equiv [1 \equiv 3] = [3 \equiv 3] = 1$$
$$[N1 \equiv 2] \equiv [1 \equiv N2] = [3 \equiv 2] \equiv [1 \equiv 2] = [3 \equiv 2] = 3$$
$$[N1 \equiv 3] \equiv [1 \equiv N3] = [3 \equiv 3] \equiv [1 \equiv 1] = [1 \equiv 1] = 1$$
$$[N2 \equiv 1] \equiv [2 \equiv N1] = [2 \equiv 1] \equiv [2 \equiv 3] = [2 \equiv 3] = 3$$
$$[N2 \equiv 2] \equiv [2 \equiv N2] = [2 \equiv 2] \equiv [2 \equiv 2] = [1 \equiv 1] = 1$$
$$[N2 \equiv 3] \equiv [2 \equiv N3] = [2 \equiv 3] \equiv [2 \equiv 1] = [3 \equiv 2] = 3$$
$$[N3 \equiv 1] \equiv [3 \equiv N1] = [1 \equiv 1] \equiv [3 \equiv 3] = [1 \equiv 1] = 1$$
$$[N3 \equiv 2] \equiv [3 \equiv N2] = [1 \equiv 2] \equiv [3 \equiv 2] = [2 \equiv 3] = 3$$
$$[N3 \equiv 3] \equiv [3 \equiv N3] = [1 \equiv 3] \equiv [3 \equiv 1] = [3 \equiv 3] = 1$$

Expresia (32.3)

$$[1 \equiv 1] = 1$$
$$[2 \equiv 2] = 1$$
$$[3 \equiv 3] = 1$$

Utilizarea matricilor (M.33.4), (M.33.5) și (M.33.6) ne-a permis să punem în lumină faptul că, la rîndul ei, axioma (32.2) este independentă, întrucît este singura expresie care, în condițiile interpretării pe baza matricilor considerate, primește valoarea 3 şi prin aceasta ea se deosebeşte de toate celelalte axiome ale lui $S\triangleright$, care, interpretate pe baza acelorași matrici, au numai valoarea 1.

Pentru testarea independenței ultimei axiome a lui $S\triangleright$ am ales următoarele matrici:

X	NX
1	2
2	3
3	1

(M. 33.7)

X	$\triangleright X$
1	2
2	3
3	3

(M. 33.8)

$X \equiv Y$	1	2	3
1	1	2	3
2	3	1	3
3	3	3	3

(M. 33.9)

în baza cărora, interpretarea axiomelor lui $S\triangleright$ are următorul rezultat:

Expresia (32.1)

$[\triangleright 1 \equiv 1] \equiv [1 \equiv \triangleright 1] = [2 \equiv 1] \equiv [1 \equiv 2] = [3 \equiv 2] = 3$
$[\triangleright 1 \equiv 2] \equiv [1 \equiv \triangleright 2] = [2 \equiv 2] \equiv [1 \equiv 3] = [1 \equiv 3] = 3$
$[\triangleright 1 \equiv 3] \equiv [1 \equiv \triangleright 3] = [2 \equiv 2] \equiv [1 \equiv 3] = [3 \equiv 3] = 3$
$[\triangleright 2 \equiv 1] \equiv [2 \equiv \triangleright 1] = [3 \equiv 1] \equiv [2 \equiv 2] = [3 \equiv 1] = 3$
$[\triangleright 2 \equiv 2] \equiv [2 \equiv \triangleright 2] = [3 \equiv 2] \equiv [2 \equiv 3] = [3 \equiv 3] = 3$
$[\triangleright 2 \equiv 3] \equiv [2 \equiv \triangleright 3] = [3 \equiv 3] \equiv [2 \equiv 3] = [3 \equiv 3] = 3$
$[\triangleright 3 \equiv 1] \equiv [3 \equiv \triangleright 1] = [3 \equiv 1] \equiv [3 \equiv 2] = [3 \equiv 3] = 3$
$[\triangleright 3 \equiv 2] \equiv [3 \equiv \triangleright 2] = [3 \equiv 2] \equiv [3 \equiv 3] = [3 \equiv 3] = 3$
$[\triangleright 3 \equiv 3] \equiv [3 \equiv \triangleright 3] = [3 \equiv 3] \equiv [3 \equiv 3] = [3 \equiv 3] = 3$

Expresia (32.2)

$[N1 \equiv 1] \equiv [1 \equiv N1] = [2 \equiv 1] \equiv [1 \equiv 2] = [3 \equiv 2] = 3$
$[N1 \equiv 2] \equiv [1 \equiv N2] = [2 \equiv 2] \equiv [1 \equiv 3] = [1 \equiv 3] = 3$
$[N1 \equiv 3] \equiv [1 \equiv N3] = [2 \equiv 3] \equiv [1 \equiv 1] = [3 \equiv 1] = 3$
$[N2 \equiv 1] \equiv [2 \equiv N1] = [3 \equiv 1] \equiv [2 \equiv 2] = [3 \equiv 1] = 3$
$[N2 \equiv 2] \equiv [2 \equiv N2] = [3 \equiv 2] \equiv [2 \equiv 3] = [3 \equiv 3] = 3$
$[N2 \equiv 3] \equiv [2 \equiv N3] = [3 \equiv 3] \equiv [2 \equiv 1] = [3 \equiv 3] = 3$
$[N3 \equiv 1] \equiv [3 \equiv N1] = [1 \equiv 1] \equiv [3 \equiv 2] = [1 \equiv 3] = 3$
$[N3 \equiv 2] \equiv [3 \equiv N2] = [1 \equiv 2] \equiv [3 \equiv 3] = [2 \equiv 3] = 3$
$[N3 \equiv 3] \equiv [3 \equiv N3] = [1 \equiv 3] \equiv [3 \equiv 1] = [3 \equiv 3] = 3$

Expresia (*32.3*)

$[1 \equiv 1] = 1$

$[2 \equiv 2] = 1$

$[3 \equiv 3] = 3$

Astfel, cu ajutorul matricilor (M.33.7) (M.33.8) și (M.33.9), am putut pune în lumină și independența axiomei (32.3) a sistemului $S \triangleright$. În consecință, luînd în considerație șirul de matrici (M.33.1) — (M.33.9), în totalitatea sa, putem conchide că axiomele sistemului $S \triangleright$ sînt independente.

Pentru a avea o imagine cît mai completă asupra consistenței sistemului formal pe care noi l-am dedicat probării teoremelor dualității vom încerca, în cele ce urmează, să testăm non-contradicția sa. În acest scop, am imaginat un model în care avem două valori, 1 și 0. Negația este interpretată ca scădere din 1, iar dualitatea ca ridicare la puterea n. În sfîrșit, echivalența este interpretată după cum urmează:

$$(1 \equiv 1) = (0 \equiv 0) = 1 \text{ și } (1 \equiv 0) = (0 \equiv 1) = 0$$

În conformitate cu cele anunțate mai sus, interpretarea negației se realizează astfel:

a) dacă $X = 1$, atunci $NX = (1 - X) = (1 - 1) = 0$;

b) dacă $X = 0$, atunci $NX = (1 - X) = (1 - 0) = 1$.

Pe baza sistemului de interpretare dedicat operatorului $\triangleright$, acesta nu ar afecta cu nimic valoarea formulei asupra căreia el este aplicat:

a) dacă $X = 1$, atunci $\triangleright X = X^n = 1^n = 1$;

b) dacă $X = 0$, atunci $\triangleright X = X^n = 0^n = 0$.

Folosind acest model de interpretare pentru axiomele lui $S \triangleright$, obținem:

Expresia (*32.1*):

$[\triangleright 1 \equiv 1] \equiv [1 \equiv \triangleright 1] = [1 \equiv 1] \equiv [1 \equiv 1] = [1 \equiv 1] = 1$

$[\triangleright 1 \equiv 0] \equiv [1 \equiv \triangleright 0] = [1 \equiv 0] \equiv [1 \equiv 0] = [0 \equiv 0] = 1$

$[\triangleright 0 \equiv 1] \equiv [0 \equiv \triangleright 1] = [0 \equiv 1] \equiv [0 \equiv 1] = [0 \equiv 0] = 1$

$[\triangleright 0 \equiv 0] \equiv [0 \equiv \triangleright 0] = [0 \equiv 0] \equiv [0 \equiv 0] = [1 \equiv 1] = 1$

Expresia (32.2)

$$[N1 \equiv 1] \equiv [1 \equiv N1] = [0 \equiv 1] \equiv [1 \equiv 0] = [0 \equiv 0] = 1$$
$$[N1 \equiv 0] \equiv [1 \equiv N0] = [0 \equiv 0] \equiv [1 \equiv 1] = [1 \equiv 1] = 1$$
$$[N0 \equiv 1] \equiv [0 \equiv N1] = [1 \equiv 1] \equiv [0 \equiv 0] = [1 \equiv 1] = 1$$
$$[N0 \equiv 0] \equiv [0 \equiv N0] = [1 \equiv 0] \equiv [0 \equiv 1] = [0 \equiv 0] = 1$$

Expresia (32.3)

$$[1 \equiv 1] = 1$$
$$[0 \equiv 0] = 1$$

Se poate remarca destul de ușor că interpretarea axiomelor lui $S\triangleright$ în cadrul modelului considerat a avut drept rezultat faptul că, pentru orice interpretare primită, fiecare axiomă s-a redus la aceeași valoare, din cele două luate ca bază a modelului ales de noi și anume, la valoarea 1. La același rezultat se va ajunge dacă vom folosi același model de interpretare pentru oricare din teoremele lui $S\triangleright$. Acestea sînt motivele pentru care considerăm că $S\triangleright$ se bucură de proprietatea de a fi un sistem necontradictoriu.

În legătură cu testarea completitudinii lui $S\triangleright$ ne vom mulțumi a arăta ce fel de expresii nu constituie legi logice pentru sistemul dedicat teoremelor dualității și, în consecință, sînt respinse de el. Procedăm și de această dată pe o cale devenită clasică:

Astfel, adăugăm axiomelor lui $S\triangleright$ formula:

$$*(33.1) \quad \triangleright \Phi^{n-1}pn \equiv N\Phi^{n-1}pn$$

Din formula *(33.1), dacă o presupunem a fi lege logică în $S\triangleright$, putem deriva, pe baza definiției (32.4), expresia:

$$*(33.2) N\Phi^{n-1}Npn \equiv N\Phi^{n-1}pn$$

Presupunem acum că în expresia *(33.2), variabila-operator „Φ" desemnează operatorul monar „N" și, în acest caz, formula *(33.2) urmează să fie retranscrisă fără indicii „$n - 1$" și „n" — așa cum am stabilit anterior:

$$*(33.2.1) \quad N\Phi Np \equiv N\Phi p$$

În continuare, înlocuim variabila-operator „Φ" cu operatorul monar „N" şi obţinem o nouă expresie:

*(33.3) $NNNp \equiv NNp$

care, conform legii dublei negaţii — regula (R_6) din $S\triangleright$ — devine

*(33.4)$Np \equiv p$

Întrucît formula *(33.4) apare a fi o contradicţie, ea nu poate fi acceptată în $S\triangleright$. În conformitate cu o eventuală regulă de respingere, de tipul *modus tollens*, rezultă că formula *(33.1) este respinsă din $S\triangleright$ ca nefiind o lege logică a acesteia.

Considerăm încheiată testarea consistenţei lui $S\triangleright$. Sistemul pe care l-am folosit pentru probarea teoremelor dualităţii poate fi socotit un sistem formal consistent. În consecinţă, urmează să acceptăm că întemeierea formală a teoremelor dualităţii a urmat o procedură corectă şi deci putem avea certitudinea caracterului de lege logică al acestor teoreme. În cele ce urmează ne vom opri pe scurt, asupra semnificaţiei lui $S\triangleright$ şi a teoremelor sale.

4. OBSERVAŢII GENERALE ASUPRA LUI $S\triangleright$

Încercînd acum o privire retrospectivă asupra legilor logice cuprinse în $S\triangleright$, vom putea constata că expresiile care îl alcătuiesc pot fi distinse în trei clase:

a) unele, se referă, în mod exclusiv, la operatorul $\triangleright$;

b) altele, se referă, în mod exclusiv, la operatorul N;

c) în sfîrşit, cele din urmă se referă la raportul dualitate-negaţie.

Dacă luăm în consideraţie expresiile din clasa (*a*) — (32.1), (32.5), (32.8), (32.9) — şi din clasa (*b*) — (32.2), (32.10), (32.12), (32.13) — atunci se poate susţine că teorema (32.12) din clasa (*b*) se referă mai degrabă la legătura dintre negaţie şi echivalenţă, după cum teorema (32.8) din clasa (*a*) se referă mai degrabă la legătura dintre dualitate şi echivalenţă.

Această teoremă (32.8), înţeleasă în sensul acesta, este implicată în ceea ce D. Hilbert şi W. Ackermann numesc *Principiul dualităţii* şi pe care ei îl explicitează prin aceea că, fiind dată

o formulă, „$A \equiv B$", care este în mod logic — adevărată și ale cărei ambe părți sînt formate din sentințe elementare și negațiile lor numai cu ajutorul conjuncției și disjuncției, rezultă o nouă formulă logic-adevărată prin schimbarea reciprocă dintre semnul conjuncției și cel al disjuncției. În continuare, ei oferă un exemplu prin intermediul legilor de distributivitate ale conjuncției la disjuncție și respectiv a disjuncției la conjuncție [24 p. 16].

Sensul teoremei (32.8) corespunde celei de a cincea legi a dualității exprimată de W. Quine și după care, așa cum am mai arătat, două formule sînt echivalente dacă și numai dacă dualele lor sînt echivalente. Pentru cazul lui $S\triangleright$, mai ales atunci cînd va fi vorba de a desprinde anumite consecințe ale teoremelor sale pentru *CP* și *CF*, sensul expresiei (32.8) și totodată, exprimarea celei de a cincea legi a dualității dată de W. Quine se poate reformula spunînd că, două formule sînt echivalente dacă și numai dacă ele sînt dualele a două formule echivalente. Această modificare de formulare operată de noi nu afectează cu nimic înțelesul teoremei (32.8) și nici cel al legii enunțată de W. Quine. În plus, formularea preferată ne permite să desprindem mai ușor modalitatea în care teorema (32.8) este implicată în soluționarea unor probleme concrete privind obținerea directă de noi legi logice, alte legi logice fiind în prealabil demonstrate.

Așadar, teorema (32.8) poate fi folosită în dezvoltarea aplicațiilor lui $S\triangleright$ pentru *CP* și *CF*, chiar dacă ar fi să ne limităm numai la aceea că ea poate fundamenta un număr important din definițiile sau din teoremele celor două calcule asociate logicii standard. Evident, cînd vorbim în acest context de teoreme, ne referim, în primul rînd, la acelea exprimate prin formule al căror principal operator este echivalența.

Faptul că această observație era necesară reiese imediat, dacă ne referim la o altă lege a dualității enunțată de W. Quine, a treia, după care dualul unei formule valide este una inconsistentă, deși ea nu apare direct în $S\triangleright$, evident, datorită caracterului ei meta-formal. Cu toate însă că ea nu apare în mod nemijlocit în $S\triangleright$, ea își păstrează deplină valabilitate chiar pentru $S\triangleright$ și pentru aplicațiile sale la *CP* și *CF*. În mod firesc, pe baza acestei legi rezultă imposibilitatea de a susține afirmația că dat fiind un sistem formal oarecare al *CP* sau *CF*, sau numai un grup de expresii valide, noi am putea obține

un alt sistem formal sau alte expresii valide, aplicînd operația de dualizare asupra primelor expresii valide. Luînd împreună cea de a treia lege a dualității enunțată de W. Quine și teorema (32.8), în formularea modificată de mai sus, putem conchide că, avînd o lege logică oarecare, dacă operatorul ei principal este echivalența, atunci putem obține o nouă lege logică, nu în sensul că cea de a doua ar fi dualul explicit al celei dintîi, ci în sensul că noua lege logică este tot o echivalență, dar formulele conectate de echivalență în cea de a doua lege logică sînt dualele formulelor conectate de echivalență în legea logică inițială. Teorema (32.8) din $S\triangleright$ — coextensivă cu cea de a cincea lege a dualității exprimată de W. Quine — își dovedește, în acest sens, importanța practică pentru simplificarea *CP* și *CF*. Am spus „simplificarea *CP* și *CF*", înțelegînd prin aceasta că luarea în considerație a principiului dualității prin intermediul teoremei (32.8), permite atît în cazul *CP*, cît și în cel al *CF*, renunțarea la demonstrația, uneori destul de complicată, a unor teoreme, în măsura în care aceste teoreme se încadrează în condițiile mai sus enunțate. În cel de al doilea paragraf al introducerii ne-am referit, în linii extrem de generale, la unele aspecte ale principiului dualității în geometria proiectivă și revenind acum asupra acestor chestiuni, putem afirma că modalitatea practică de folosire a principiului dualității în geometria proiectivă pentru a obține din teoreme deja existente alte teoreme, își află baza în semnificația teoremei (32.8) sau în cea a celei de a cincea legi a dualității enunțată de W. Quine.

Teoremele subsumate clasei (*b*) nu necesită o discuție specială, cu atît mai mult cu cît ele nu reprezintă un aport original al lui $S\triangleright$. Existența lor în $S\triangleright$ se explică doar prin necesitatea de a întemeia alte teoreme, și anume, a acelora care privesc raportul dualitate-negație, precum și a eventualelor comentarii asupra acestui raport*.

Ne oprim, pe scurt, asupra altor teoreme incluse în clasa (*a*), adică seria de teoreme dedicate exclusiv operatorului $\triangleright$. În această ordine de idei, considerăm că sensul expresiei (32.5) poate fi explicitat prin aceea că dubla dualizare a unei formule oarecare este echivalentă cu formula inițială. Ana-

* A se vedea, în acest sens, capitolul doi al acestei lucrări, în special paragraful (2.1).

logia dintre această proprietate a operatorului ▷ şi proprietatea similară a operatorului *N* a fost făcută în primul paragraf al capitolului doi şi nu socotim necesar să revenim asupra ei. Cu toate acestea, e necesar a preciza că această analogie, referitoare la proprietatea citată, are o mai mare întindere.

Astfel, luînd în consideraţie şi unele teoreme incluse în clasa (*a*), putem conchide că aplicarea operatorului ▷ asupra unei formule oarecare de un număr par de ori (2*n*) este echivalentă, prin rezultat, cu formula asupra căreia a fost aplicată operaţia de dualizare. În acest sens, s-ar părea că operatorul ▷ se aseamănă cu unii operatori binari ai *CP*, definiţi, într-un anume context, al autoconectării, ca periodic idempotenţi [47, p. 349—368]. Dar, revenind la ideea de mai sus, considerăm că o generalizare asemănătoare, pentru negaţie, este sugerată de teorema (32.10) prin compararea ei cu unele dintre teoremele incluse în clasa (*c*). Apelul la teoreme incluse în clasa (*c*) vizează, în primul rînd, luarea în consideraţie a expresiilor (32.16) — (32.18), (32.23) — (32.25) şi a celor grupate în şirul de la (32.26) la (32.31).

Alături de teoremele deja citate ca elemente ale clasei (*c*), alte teoreme subsumate acestei clase, aşa cum ar fi cele din seriile (32.18.1) — (32.18.3), (32.25.1) — (32.25.3) şi (32.31.1) — (32.31.15) ne sugerează şi un alt aspect al legăturii dintre dualitate şi negaţie. Astfel, dacă teorema (32.20) ar putea fi citită şi ca atestarea unei comutativităţi între operatorii ▷ şi *N*, adică înţelesul ei ar fi acela că ordinea de aplicare a dualizării şi a negaţiei asupra unei *fbf* oarecare este indiferentă, teoremele grupate imediat mai sus relevă faptul că aplicarea operatorului ▷ şi a operatorului *N*, asupra unei *fbf* oarecare, se bucură şi de proprietatea asociativităţii. Evident, această ultimă aserţiune nu vrea să spună mai mult decît că, fiind dată o formulă oarecare, aplicarea asupra ei a dualităţii şi a negaţiei în mod repetat, numărul acestor aplicări este mai mare decît doi, este indiferent modul în care se grupează aplicarea negaţiei şi a dualizării.

Dintre teoremele incluse de noi în clasa (*c*), un loc deosebit, dată fiind semnificaţia ei, îi revine formulei (32.19). Incluse în aceeaşi clasă, teoremele (32.14) şi (32.15) apar doar cu paşi intermediari pentru derivarea teoremelor (32.19) şi (32.20). Semnificaţia deosebită a teoremei (32.19) ţine de faptul că, prin înţelesul ei, ea este echivalentă cu ceea ce B. Mates

numește „teorema negației". Întrucît am discutat asupra înțelesului ei ca teoremă a negației, pentru moment dorim să remarcăm doar faptul că $S\triangleright$ ne-a permis o întemeiere strict formală a acestei expresii.

În sfîrșit, pentru a epuiza și clasa (*c*) se cuvine a remarca expresiile (32.21), (32.22) și (32.22.1). În primul rînd, expresia (32.21) care poate fi citită în sensul că, dacă și numai dacă dualul unei formule este echivalent cu negația altei formule, atunci și negația primei formule este echivalentă cu dualul celei de a doua formule, prezintă un aspect, notat prin citirea acestei formule, a legăturii reciproce dintre dualitate și negație ca două operații distincte. În ceea ce privește formulele (32.22) și (32.22.1), dorim să remarcăm doar faptul că ele ne permit să considerăm ca înfăptuită asimilarea în cadrul lui $S\triangleright$ a noțiunii de predual prin intermediul dualului negației sau al negației dualului unei formule, așa cum acest lucru a fost anunțat anterior.

O altă observație care se impune, privind retrospectiv asupra celor discutate pînă în prezent, este faptul că, din toate legile dualității acceptate prin expresiile din capitolul doi, una singură lipsește din ansamblul legilor logice care alcătuiesc sistemul $S\triangleright$. Este vorba de acea expresie pe care am numit-o „principiul dualității pentru implicație" și pe care am redat-o prin formula (23.9). Explicația faptului că această lege a dualității nu apare în $S\triangleright$ ni se pare firească. Ea constă în aceea că, în $S\triangleright$ am acceptat, în afara negației, un singur alt operator al *CP*, echivalența. Este cunoscut faptul că echivalența poate fi definită printr-o implicație reciprocă, însă se știe la fel de bine că echivalența nu poate reda singură și nici cu ajutorul negației, implicația.

Dacă, în construcția lui $S\triangleright$, am fi utilizat ca operator fundamental, alături de operatorii $\triangleright$ și *N*, operatorul implicație, legea discutată ar fi apărut cu siguranță ca teoremă, așa după cum raportul dintre dualitate și echivalență este redat de teorema (32.8) din $S\triangleright$. Dacă am fi procedat însă așa, ar fi fost necesar nu numai să alegem alte axiome și alte reguli de deducție, ci, evident, trebuia să adăugăm cel puțin o definiție suplimentară. În orice caz, $S\triangleright$ ar fi fost, de la început, mult mai complicat. În plus, în procesul de obținere a echivalențelor desemnate de teoremele lui $S\triangleright$, complicația ar fi sporit prin aceea că obținerea fiecărei echivalențe ar fi impus doi

pași intermediari: cele două implicații presupuse de definiția echivalenței prin implicație reciprocă.

Aceasta este explicația faptului că formula (23.9) nu apare ca teoremă a lui $S\triangleright$ și în același timp, o parte din explicația alegerii de către noi a echivalenței ca operator fundamental al lui $S\triangleright$, alături de negație și dualitate. Cealaltă parte a acestei ultime explicații ține de faptul că am fost interesați în întemeierea teoremelor dualității de acea formă a acestor teoreme care are echivalența ca operator principal. În sfîrșit, faptul că am fost interesați de o astfel de formă de exprimare a teoremelor dualității este motivat prin cerințele impuse de aplicabilitatea teoremelor lui $S\triangleright$ la nivelul *CP* și *CF*.

Remarcînd, în final, numărul minim de axiome cerut de $S\triangleright$, de fapt cîte una pentru fiecare din operatorii care apar în sistem, încheiem aici scurtele comentarii asupra teoremelor dualității. Evident, aceste comentarii pot fi lărgite, dar considerăm că primul lucru care se impune acum este încercarea de a desprinde ce efecte ar putea avea, pentru logica formală în general, acceptarea axiomelor și a teoremelor lui $S\triangleright$.

IV

PRINCIPIUL DUALITĂȚII ȘI LOGICA FORMALĂ

În primul paragraf al introducerii am definit dualitatea drept a relație de corespondență de un tip special, în sensul că această relație presupune o anumită inversiune simetrică a elementelor raportului. Tot atunci am precizat că această definiție este destul de largă și am sugerat ideea că o definiție riguroasă a dualității impune utilizarea mijloacelor tehnice ale logicii moderne. Tocmai de aceea, înainte de a încerca să desprindem unele implicații ale principiului dualității în logica formală în general, folosind metodele logicii simbolice, am analizat conținutul acestui principiu și proprietățile formale ale dualității.

Utilizînd pentru analiza principiului dualității metode specifice ale logicii standard, aceasta nu înseamnă că el își află un domeniu logic de manifestare doar la nivelul logicii standard. Dimpotrivă, așa cum afirmam în introducere, considerăm că principiul dualității este implicat la nivelul logicii formale în genere și chiar mai mult, prezența lui poate fi constatată și dincolo de granițele științei logicii, la nivelul științelor formale în genere. Totuși, deși principiul dualității acoperă un domeniu atît de larg, prezența lui se face simțită în mod direct numai în cîmpul acelor științe cărora le revine nu numai atributul de a fi științe formale, ci și acela de a fi formalizate. În plus, la nivelul unor astfel de științe — și aici avem în vedere, în primul rînd, matematica și logica simbolică — dispunem și de mijloacele necesare unei analize riguroase a dualității.

Pe de altă parte însă, am vorbit de manifestări specific logice ale principiului dualității și chiar mai mult, avem impresia

că atributul fundamental al acestui principiu este acela de a fi un principiu de natură logică. Totodată, operînd o distincție între logica tradițională și logica simbolică, am arătat că nu considerăm cele două nume ca denotînd două științe absolut separate ci, dimpotrivă, două orizonturi, două dimensiuni ale unei științe unice: știința logicii. Pare deci, cu totul firesc să ne întrebăm acum în ce constă manifestarea principiului dualității în cadrul logicii tradiționale. Altfel spus, legătura dintre logica tradițională și logica simbolică, privită din perspectiva principiului dualității, se reduce oare numai la faptul că în cadrul logicii simbolice putem constata între anumite expresii inferențe analoage celor din pătratul logic clasic, al judecăților de predicație?

1. PRINCIPIUL DUALITĂȚII ȘI LOGICA TRADIȚIONALĂ

Pentru a răspunde deschis la această întrebare, trebuie să spunem că, principiul dualității este implicat la nivelul logicii tradiționale, dar că implicațiile lui aici pot fi făcute mai greu explicite și asta tocmai datorită specificului logicii tradiționale, anume, acela de a fi o logică formală dar nu și o logică formalizată. Cu scopul de a oferi detalii suplimentare referitoare la această aserțiune, vom încerca, în cele ce urmează, să expunem pe scurt rezultatele investigațiilor noastre privind implicațiile principiului dualității în logica tradițională, altfel spus, la nivelul formelor logice studiate de logica tradițională.

Dacă ne oprim asupra noțiunii, prima și cea mai simplă dintre formele gîndirii analizate de logica tradițională, considerăm că punctul de plecare în încercarea de a sesiza implicații ale principiului dualității îl constituie raportul elementelor structurale ale noțiunii: sfera și conținutul noțiunii.

Este cunoscut faptul că, aceste două elemente ale structurii noțiunii sînt elemente corelative, lucru dovedit chiar dacă ar fi să ne limităm numai la aspectele definitorii ale fiecăruia dintre aceste elemente: sfera noțiunii se definește în relație cu conținutul ei, iar conținutul noțiunii se definește prin raportare la sfera noțiunii. Mai mult, — și acesta este faptul care ne interesează din punctul de vedere al principiului dualității — între conținutul și sfera noțiunii este atestată o relație

de corespondență fundamentată pe o inversiune simetrică. Logica tradițională constată că raportul dintre sfera și conținutul noțiunii, privit dintr-o perspectivă dinamică, este guvernat de legea variației inverse dintre conținutul și sfera noțiunii. În conformitate cu această lege, unei sfere restrînse a noțiunii îi corespunde, la aceeași noțiune, un conținut bogat și invers, unui conținut restrîns al noțiunii îi corespunde o sferă bogată. Privită dinamic, acțiunea acestei legi se realizează prin aceea că, pe măsură ce sfera noțiunii devine mai largă, conținutul ei se restrînge și invers, pe măsură ce conținutul noțiunii se îmbogățește, sfera noțiunii se restrînge. Tocmai acest tip de influențare reciprocă între sfera și conținutul noțiunii ne sugerează ideea că elementele din structura noțiunii sînt două elemente duale.

Să luăm definiția fiecăruia dintre aceste elemente din structura noțiunii. Astfel, sfera noțiunii poate fi definită:

a) *Sfera* este elementul logic din structura noțiunii care denotează obiectele ce posedă însușirile reflectate prin conținutul său.

Pe de altă parte, conținutul noțiunii își află o definire prin enunțul:

b) *Conținutul* este elementul logic din structura noțiunii care reflectă însușirile ce aparțin obiectelor denotate prin sfera noțiunii.

Fără îndoială că nu este deloc dificil a observa că între aceste două enunțuri există un raport analog cu cel dintre enunțurile (A_2) și (A_3) din paragraful (0.2) — adică două dintre postulatele geometriei proiective. La fel ca și în acel caz, socotit un aspect fundamental al existenței principiului dualității în geometria proiectivă, oricare dintre aceste două enunțuri ar fi dat primul, celălalt poate fi obținut, în mod simplu, operînd numai cîteva schimbări de termeni.

Astfel, dacă a fost dat, să spunem enunțul (*a*) — definiția sferei noțiunii — și dacă în cadrul lui schimbăm termenul *sferă* cu termenul *conținut* și operăm în continuare toate celelalte schimbări ce decurg de aici, adică schimbăm între ei termenii *a denota* cu *a reflecta*, *obiect* cu *însușire* și *a poseda* cu *a aparține*, rezultatul acestor schimbări va fi enunțul (*b*), adică tocmai definiția conținutului noțiunii. Pe o cale absolut identică, din enunțul (*b*) poate fi obținut enunțul (*a*).

Avînd în vedere înțelesul principiului dualității, rezultă, în mod necesar, că enunțurile (*a*) și (*b*) sînt două enunțuri duale. Mai mult, dacă enunțul (*a*) constituie o definiție a sferei noțiunii și dacă enunțul (*b*) constituie o definiție a conținutului noțiunii, atunci urmează, fără îndoială, că structura noțiunii constă din două elemente duale: sfera și conținutul noțiunii.

În această perspectivă, legea variației inverse dintre conținutul și sfera noțiunii, își află substratul în principiul dualității, concret, în relația de dualitate dintre sfera și conținutul noțiunii. Această lege nu face altceva decît marchează manifestarea dinamică a principiului dualității implicat, în mod specific, în structura noțiunii. În măsura în care dorim să punem în lumină veritabila natură a raportului dintre elementele din structura noțiunii, credem că e mai firesc să spunem că acest raport este guvernat de principiul dualității și că acțiunea sa se realizează printr-o variație inversă între conținutul și sfera noțiunii. Această modificare de perspectivă în analiza structurii noțiunii o considerăm îndreptățită întrucît relația dintre conținutul și sfera noțiunii este, în primul rînd — și aceasta în sens fundamental — o relație de dualitate, iar variația inversă nu este decît un efect al principiului dualității în forma sa de manifestare specifică structurii logice a noțiunii și spiritului logicii tradiționale.

În plus, renunțînd la a explica raportul dintre conținutul și sfera noțiunii printr-un factor derivat și făcînd apel la veritabila natură a acestui raport, este eliminată și posibilitatea unor ambiguități în înțelegerea acestui raport, ambiguități posibile atunci cînd relația dintre elementele structurale ale noțiunii este explicată, în mod exclusiv, prin așa-numita lege a variației inverse dintre conținutul și structura noțiunii. Pentru a arăta la ce fel de ambiguități ne referim, este suficient a aminti că prezentînd raportul dintre conținutul și sfera noțiunii pe calea legii variației inverse doar, explicația rămîne incompletă și totdeauna este nevoie să adăugăm precizări suplimentare, uneori chiar ieșind dincolo de granițele logicii, cu privire la natura acestei inversiuni. Aceste precizări sînt necesare, tocmai pentru faptul că, urmînd o astfel de cale, nu se reușește să se explice adevăratul conținut al relației dintre elementele din structura noțiunii, principiul dualității.

Desprinderea implicațiilor principiului dualității în structura noțiunii ne oferă un element important pentru a trata în mod clar și consecvent întreaga teorie a noțiunii, cel puțin în măsura în care, teoria logică a noțiunii este concepută ca fundamentată pe raportul dintre sfera și conținutul noțiunii. Evident, nu avem intenția să dezvoltăm aici întreaga problematică a teoriei logice a noțiunii din perspectiva principiului dualității și de aceea vom da numai cîteva exemple.

Astfel, un paragraf important al logicii noțiunii îl constituie analiza raportului dintre noțiunile gen și noțiunile specie și, pe baza acestui raport și a celui dintre elementele din structura noțiunii, analiza operațiilor logice de generalizare și de determinare a noțiunilor. Este aproape unanim acceptat că raportul dintre noțiunile gen și noțiunile specie are o importanță ce depășește restrîngerea sa la teoria logică a noțiunii. Raportul *gen-specie* poate fi înțeles ca manifestare specific logică a raportului general dintre universal și particular.

Pentru a putea pune în lumină implicațiile principiului dualității și aici, vom porni de la definițiile noțiunii gen și noțiunii specie. Vom ordona aceste două definiții în coloane paralele:

(*a*′) Noțiunea gen este o noțiune care cuprinde în sfera ei o altă noțiune, mai puțin generală decît ea.

(*b*′) Noțiunea specie este o noțiune care este cuprinsă în sfera altei noțiuni mai generale decît ea.

Și de această dată putem constata că, oricare dintre enunțurile (*a*′) sau (*b*′) ar fi dat primul, celălalt poate fi obținut pe calea unor simple schimbări de termeni. De data aceasta, pentru a trece, să spunem, de la enunțul (*a*′) — definiția noțiunii gen — la enunțul (*b*′) — definiția noțiunii specie — este suficient să schimbăm termenul *gen* cu termenul *specie*, termenul *care cuprinde* cu termenul care *este cuprins* și termenul *mai puțin general* cu termenul *mai general*. Pe o cale absolut identică se poate trece de la enunțul (*b*′) la enunțul (*a*′). Orice alte diferențe dintre enunțurile (*a*′) și (*b*′) sînt numai de natură gramaticală. În consecință, asemănător enunțurilor (*a*) și (*b*), enunțurile (*a*′) și (*b*′) pot fi considerate drept enunțuri duale. Pentru a pune și mai bine în lumină raportul de dualitate între noțiu-

nea gen și noțiunea specie, bazîndu-ne pe existența raportului de dualitate între conținutul și sfera noțiunii, putem înlocui enunțul (a') prin:

„Noțiunea gen este o noțiune generală care se cuprinde în conținutul unei alte noțiuni, mai puțin generală decît ea", fără a altera prin aceasta cu nimic definiția noțiunii gen. Singura modificare față de cele anterior spuse este că în locul schimbării dintre termenii *care cuprinde* și *care este cuprins*, pentru trecerea de la definiția genului la definiția speciei se va opera o schimbare între termenii *conținut* și *sferă*.

Dar, pentru a arăta, o dată în plus, că principiul dualității își află o manifestare neîndoielnică în raportul noțiunilor gen-specie, ne vom referi în continuare la acest raport privit acum simultan din punctul de vedere al ambelor elemente din structura noțiunii.

(a'') Din punctul de vedere al *conținutului*, *genul* se cuprinde total în *conținutul speciei*, iar din punctul de vedere al *sferei*, *genul* cuprinde *specia* ca o parte a sa.

(b'') Din punctul de vedere al *sferei*, *specia* se cuprinde total în *sfera genului*, iar din punctul de vedere al *conținutului*, *specia* cuprinde *genul* ca o parte a sa.

La rîndul lor, enunțurile (a'') și (b'') se dovedesc a fi enunțuri duale. A obține din unul din ele, oricare ar fi cel ales primul, pe cel de al doilea, nu înseamnă decît a schimba între ei termenii subliniați. De data aceasta schimbările cerute vizează exclusiv elemente duale. În plus, în măsura în care enunțurile duale (a'') și (b'') prezintă în mod riguros raportul gen-specie din punctul de vedere al elementelor din structura noțiunii, dualitatea dintre ele confirmă existența unui raport de dualitate între noțiunile gen și noțiunile specie.

În această perspectivă, avînd date ca perechi duale noțiunile conținut-sferă și noțiunile gen-specie, este firesc a conchide existența unui raport de dualitate între operația de generalizare și cea de determinare a noțiunilor. Nu este necesar să insistăm în mod deosebit asupra acestei chestiuni. Ca o consecință a dualității dintre conținut și sferă și dintre gen și specie, operațiile de generalizare și de determinare a noțiunilor sînt două operații duale, iar elementul nou pe care

aceste operații îl aduc în raport cu implicațiile principiului dualității în teoria logică a noțiunii, cu care ne-am ocupat pînă acum, este faptul că ele pot fi considerate ca o manifestare dinamică a principiului dualității într-un mod oarecum asemănător cu cel în care am vorbit în cadrul logicii standard despre dualizare, ca manifestare operațională a principiului dualității, în raport cu relația de dualitate.

O observație ni se pare necesară privind manifestările principiului dualității în cadrul teoriei logice a noțiunii. La nivelul logicii standard, am putut constata existența raportului de dualitate între două funcții logice, sau între două expresii distincte. Un caz oarecum deosebit l-au reprezentat operatorii auto-duali din clasa III, sau expresiile auto-duale. Cu toate acestea și acolo, folosind definiția (32.4), fiind dată o funcție logică auto-duală, exprimabilă printr-o formulă simplă, să spunem *Fpq*, noi putem construi, ca dual al acestei expresii, formula *NFNpNq*. Este adevărat că expresia *NFNpNq* este echivalentă cu expresia *Fpq*, dar, strict vorbind, cei doi duali sînt și în acest caz două expresii grafic distincte. Mai mult, chiar dacă am spune că dualul lui *Fpq* este *Fpq* însuși, caracterul de auto-dual al formulei considerate, nu înseamnă că raportul de dualitate este intern formulei auto-duale, ci înseamnă doar că ea este echivalentă cu propriul ei dual.

În cazul în care însă, luăm în considerație, din punctul de vedere al principiului dualității, noțiunea, nu vom mai putea constata existența celor doi duali ca două expresii distincte. Nu poate fi vorba nici de un exemplu de auto-dualitate și aceasta pentru că elementele aflate în raport de dualitate nu se confundă unul cu celălalt, dar ele sînt elemente constitutive ale noțiunii. Chiar atunci cînd vorbim despre dualitatea dintre gen și specie și nu despre aceea dintre conținutul și sfera noțiunii, raportul de dualitate este tot interior noțiunii, căci nu e posibil a concepe specia ca exterioară genului sau genul ca nefiind o notă esențială a speciei. În acest fapt noi vedem un aspect specific al manifestării principiului dualității la nivelul noțiunii, ca formă logică studiată de logica tradițională.

Analiza implicațiilor principiului dualității la nivelul primei forme de gîndire studiată de logica tradițională ne conduce la concluzia că dualitatea este internă noțiunii, manifestîndu-se ca relație între elementele structurii noțiunii. Această idee

ne poate servi ca punct de plecare în încercarea pe care o facem de a descoperi modul de manifestare a principiului dualității la nivelul judecății și implicațiile sale în teoria judecății.

Plecînd de la tabloul kantian al clasificării judecăților trebuie să facem, de la început, cîteva precizări. Astfel, din analiza clasificării judecăților vom distinge trei tipuri mari de judecăți: *judecăți simple* (judecățile de predicație) *judecăți compuse* (acele judecăți care se disting față de judecata de predicație pe baza criteriului relației) și *judecăți modale* (simple sau compuse). Tot de la început trebuie să anunțăm că nu ne vom ocupa aici de ultimele două tipuri de judecăți. În cazul judecăților compuse, din care majoritatea manualelor de logică tradițională nu recunosc decît o parte (judecata disjunctivă neexclusivă, judecata disjunctivă exclusivă, judecata ipotetică neexclusivă și judecata ipotetică exclusivă), considerăm că analiza lor din punctul de vedere al dualității este analoagă cu cea a celor 16 operatori binari ai *CP* și în consecință, nu ar aduce nimic nou. În ceea ce privește problema judecăților modale, analiza lor, din perspectiva principiului dualității, ar fi mult mai adecvată în contextul unei investigații mai largi asupra manifestărilor principiului dualității în logica modală în genere, dar asupra acestor chestiuni nu intenționăm să ne oprim în detaliu pe parcursul acestei lucrări.

În consecință, discuția se va referi în continuare exclusiv la judecățile de predicație. De la început vom căuta să desprindem în ce măsură se poate vorbi de o implicare a principiului dualității în interiorul judecății de predicație. Faptul că elementele structurale ale judecății, subiectul și predicatul, sînt noțiuni, ne conduce la ideea că, în genere, nu putem vorbi de o manifestare a principiului dualității sub forma unui raport între elementele structurale ale judecății. Avînd în vedere cele constatate anterior, privitor la noțiune, am putea spune cel mult că principiul dualității își află o manifestare internă la nivelul fiecăreia din noțiunile ce intră în alcătuirea judecății.

În cele mai multe cazuri, subiectul unei judecăți de predicație este interpretat ca o noțiune, iar predicatul ca o notă afirmată sau negată despre această noțiune. Pentru o astfel de interpretare nu pare posibil să vorbim de principiul dualității ca implicat în raportul subiect-predicat. Aceasta în primul rînd pentru faptul că subiectul nu poate fi înțeles doar

ca sferă a unei noțiuni, iar predicatul drept conținutul aceleiași noțiuni, în sensul de element structural al acelei noțiuni. Ar rămîne totuși deschisă o posibilitate, și anume, aceea în care subiectul judecății este gîndit ca o specie, iar predicatul judecății ca fiind tocmai genul care include acea specie. Dar și de data aceasta ajungem la aceeași concluzie, căci pe de o parte, o astfel de interpretare este bazată pe luarea în considerație a conținutului concret-determinat al judecății și nu pe înțelegerea judecății ca formă logică în genere și, în plus, principiul dualității își află manifestarea, am stabilit aceasta anterior, la un nivel general, la nivelul formei logice și nu la nivelul unei propoziții concrete. Concluzia la care ajungem este că nu se poate vorbi, într-un mod propriu, de un raport de dualitate în interiorul judecății.

Dar dacă în interiorul judecății de predicație nu se poate constata prezența a două elemente duale, am putea spera ca principiul dualității să-și afle locul în teoria judecății de predicație, ca un raport între două judecăți de predicație. De la început excludem posibilitatea de a aborda această problemă pe baza formulelor bine cunoscute ale *CF* care sînt oferite ca mijloace de modelare a judecății de predicație în cadrul și pentru cerințele logicii predicatelor. Excludem această cale pentru că ar însemna să studiem aplicarea principiului dualității în logica predicatelor și nu în logica judecăților de predicație. La fel, excludem posibilitatea de a aborda această problemă, în mod direct pe baza definiției dualității, așa cum această definiție apare în cadrul lui $S\triangleright$. Această a doua posibilitate este exclusă pentru că formula (32.4) corespunde unui alt domeniu decît celui căruia îi aparține judecata de predicație ca formă logică. Formele logice pentru care formula (32.4) a fost acceptată ca definiție a dualității sînt expresiile logicii standard și nu formele logice specifice logicii tradiționale.

Cu toate acestea, modul în care a fost alcătuită formula (32.4) ca definiție a operatorului $\triangleright$ în cadrul logicii standard ne poate servi ca un jalon pentru a descoperi în ce măsură vom putea vorbi de o manifestare a principiului dualității în raporturile dintre judecățile de predicație. În conformitate cu formula (32.4), aplicarea operației de dualizare unei formule oarecare a *CP* are loc prin intermediul negației, care afectează în mod distinct toate elementele constitutive ale expresiei

afectate de operatorul $\triangleright$. De aici desprindem două idei. Prima: aplicarea operației de dualizare asupra unei forme logice se face cu ajutorul negației. A doua: aplicarea negației, pentru a obține dintr-o formă logică dată, dualul ei, se face în funcție de elementele constitutive ale acestei forme logice. De exemplu, elementele constitutive ale unei expresii a *CP* sînt variabilele propoziționale și operatorul care le conectează, iar atunci cînd asupra unei asemenea expresii se aplică operația de dualizare, negația afectează simultan, atît fiecare din variabilele propoziționale, cît și operatorul care le conectează.

Prima din concluziile la care am ajuns pe baza discuției de mai sus în legătură cu formula (32.4), și anume, efectuarea operației de dualizare prin intermediul negației, poate fi transferată și la nivelul judecății de predicație, pentru că și aici, dacă nu ca operator, negația este totuși prezentă ca operație de respingere. Dar pentru a vedea în ce fel se poate vorbi de aplicarea negației asupra unei judecăți de predicație, astfel încît, modalitatea ei de aplicare să coincidă cu operația de dualizare, rămîne de stabilit în urma unei analize prealabile a judecății de predicație, pentru a vedea asupra căror părți din alcătuirea ei trebuie aplicată negația. Astfel, dacă luăm în considerație judecata de predicație în forma ei generală, am putea conchide că formula „*SP*" corespunde judecății de predicație, dar nu ca un tip anume de judecată, ci ca expresie a acelei forme logice pe care, spre deosebire de noțiune și de raționament, o definim drept judecată. Logica tradițională recunoaște însă patru tipuri fundamentale ale judecății de predicație pe care le distinge una de alta după criteriul cantității și calității. În funcție de aceste criterii, noi distingem: judecata universal-afirmativă, judecata universal-negativă, judecata particular-afirmativă și judecata particular-negativă.

Acum, dacă luăm în considerație formulele prin care sînt reprezentate aceste tipuri de judecăți de predicație și pe care, dat fiind scopul pe care îl urmărim, propunem să le alcătuim după cum urmează:

(41.1) $TS + P =$ judecată universal-afirmativă:
Toți *S* sînt *P*

(41.2) $TS - P =$ judecată universal-negativă:
Nici un *S* nu este *P*

(41.3) $US + P =$ judecată particular-afirmativă: Unii S sînt P

(41.4) $US - P =$ judecată particular-negativă: Unii S nu sînt P,

vom putea constata că acele elemente care ne permit să precizăm cu ce fel de judecăți de predicație avem de a face sînt cuantorul (reprezentat prin T sau U și așezat în fața judecății) și copula (reprezentată prin „+" sau „—" și așezată între subiect și predicat). Cuantorul determină cantitatea, iar prin intermediul copulei se poate decide calitatea judecății.

Avînd în vedere discuția anterioară, urmează că aplicarea operației de negație, în vederea realizării operației de dualizare, trebuie să afecteze cuantorul, adică elementul care desemnează cantitatea judecății și simultan copula, adică elementul care desemnează calitatea judecății. În acest sens, dacă enunțul judecății universal-afirmative este „*Toți S sînt P*", atunci aplicînd în cadrul acestui enunț negația asupra cuantificatorului și a copulei, obținem enunțul „*Nu toți S nu sînt P*", care poate fi reformulat prin „*Nu e adevărat că nici un S nu este P*" și care, la rîndul său, poate fi tradus printr-o judecată particular-afirmativă: „*Unii S sînt P*". În măsura în care o astfel de modificare a definiției dualității este acceptată, urmează că între judecata universal-afirmativă și judecata particular-afirmativă există un raport de dualitate. Este ușor de observat faptul că, aplicînd în același fel negația asupra judecății particular-afirmative, vom obține, prin intermediul enunțului „Nu e adevărat că unii S nu sînt P", ca dual al ei, judecata universal-afirmativă. Mai departe, procedînd în același fel cu judecățile universal-negativă și particular-negativă, vom putea conchide și că între ele există un raport de dualitate.

Pornind de la formulele (41.1), (41.2), (41.3) și (41.4) vom putea spune că formulele:

(41.5) $\triangleright(TS + P) = US + P$
(41.6) $\triangleright(TS - P) = US - P$
(41.7) $\triangleright(US + P) = TS + P$
(41.8) $\triangleright(US - P) = TS - P$

exprimă perechile de duali, în cazul judecăților de predicație.

Concluziile anterioare privind principiul dualității sînt confirmate și în cazul judecății de predicație, pe baza adaptării definiției dualității la specificul formei logice abordate. În acest sens, dacă pe baza definiției dualității putem obține din fiecare din judecățile universale, judecățile particulare de aceeași calitate și reciproc, din judecățile particulare, putem obține judecățile universale de aceeași calitate, atunci, folosind negația, se poate realiza trecerea de la judecățile universale la judecățile particulare de calitate deosebită și invers, de la judecățile particulare la cele universale diferite calitativ față de judecățile particulare de la care s-a pornit. Prin urmare, luînd judecata *A* ca punct de plecare, ea își află dualul în judecata *I* și, pornind mai departe de la judecata *I*, judecata *A* își află negația dualului ei în judecata *E*. Sau, pornind de la aceeași judecată *A*, ea își află negația în judecata *O* și dualul negației sale în judecata *E*. Nu e necesar să continuăm cu alte exemple pentru a putea deriva concluzia că, în urma definiției dualității acceptată mai sus, cele patru judecăți de predicație *A*, *E*, *I* și *O* apar ca bucurîndu-se de proprietatea de a fi armonic conjugate.

În consecință, considerăm că modificările aduse definiției dualității, propriu-zis numai modalității concrete de aplicare a ei, nu constituia o înfrîngere a consecvenței concepției noastre despre principiul dualității. Aceste modificări țin de specificul formei logice abordate și nu de o schimbare a perspectivei de înțelegere a principiului dualității. Mai mult, principiul dualității ne permite să punem în lumină un aspect important al ansamblului de inferențe proprii pătratului logic clasic al judecăților de predicație. Existența unor astfel de inferențe între judecățile de predicație nu poate să mai fie pusă la îndoială și că același lucru se poate spune și despre corelația dintre existența acestor inferențe între patru formații logice și proprietățile acestor formații de a fi armonic conjugate. În plus, rezultatele obținute în cadrul teoriei judecăților de predicație, din perspectiva principiului dualității, ne oferă, un criteriu suficient de riguros pentru a stabili un punct de legătură între logica tradițională și logica simbolică și, în același timp, un punct de deosebire între cele două dimensiuni ale științei logicii. În acest sens, proprietatea unor elemente logice de a fi armonic conjugate explică inferențele de tipul pătratului logic, indiferent dacă aceste inferențe se realizează

în cadrul *CP* sau în interiorul teoriei judecăților de predicație din logica tradițională, dar tot această proprietate ne va permite să constatăm pînă în ce grad putem vorbi de o modelare a judecăților de predicație în cadrul *CF*. Asupra acestei ultime chestiuni vom reveni în unul din următoarele paragrafe ale acestui capitol.

Cu scopul de a încerca, pe cît posibil, o tratare completă a implicațiilor principiului dualității la nivelul logicii tradiționale, ne vom opri în continuare asupra ultimei forme de gîndire studiate de logica clasică, raționamentul. Raționamentul se distinge de formele logice anterior abordate, în primul rînd prin caracterul său complex și procesual. Raționamentul este o inferență mediată, dar din analiza pe care am întreprins-o asupra principiului dualității a rezultat că el este aplicabil unor formule logice și nu unor inferențe în care aceste formule sînt doar elementele drumului de la premise la concluzie. În cadrul raționamentului, aceste elemente sînt în primă instanță judecăți și am constatat în ce sens principiul dualității își află o manifestare la nivelul judecății. În consecință, cele expuse cu privire la judecata de predicație, din punctul de vedere al dualității, nu pot constitui un punct de plecare în abordarea implicațiilor principiului dualității în raționament. E adevărat, spre deosebire de alte forme logice, pare mai ușor a transcrie un tip sau altul de raționament printr-o formulă a logicii propozițiilor sau prin una a logicii predicatelor, dar aceasta nu numai că ar duce la pierderea a ceea ce este specific raționamentului ca formă de gîndire — actul de mediere, dar ar însemna și o schimbare de perspectivă: studierea principiului dualității la nivelul logicii propozițiilor, sau la cel al logicii predicatelor.

Evident, și raționamentul, în măsura în care el presupune ca ultim element constitutiv noțiunea, se află în corelație cu principiul dualității, dar aceasta nu înseamnă o manifestare directă a principiului dualității la nivelul raționamentului. În măsura în care pentru raționament noțiunea este element constitutiv, dată fiind unitatea elementelor ei structurale, sfera și conținutul, el presupune și principiul dualității. Ilustrarea cea mai clară a acestei aserțiuni o oferă raționamentul deductiv, prin axioma silogismului. Această axiomă este unică, dar se manifestă printr-o dedublare, ale cărei elemente sînt elemente duale: extensiunea și comprehensiunea.

Fără îndoială, concluzia noastră pare justificată în măsura în care elementul structural ultim al raționamentului este noțiunea și în măsura în care noțiunea este concepută ca unitate indisolubilă între sferă și conținut.

Încheiem aici referințele noastre la implicațiile principiului dualității la nivelul formelor logice studiate de logica tradițională. O ultimă idee pe care dorim să o desprindem și care, credem, rezultă din cuprinsul acestui paragraf, este aceea că principiul dualității își manifestă, cu precădere indirect, prezența la nivelul logicii tradiționale și acest lucru se explică nu numai prin faptul că avem de a face cu o logică formală, dar neformalizată ci, mai ales, prin specificul formelor logice studiate de logica clasică.

Acest principiu al dualității își află manifestarea sa plenară la nivelul logicii simbolice, orizont logic formal și, în același timp, formalizat. Dar caracterul formalizat al logicii simbolice ține numai parțial de metodele de investigare folosite de ea și, în primul rînd, el este o consecință firească a formelor logice studiate de logica simbolică, elemente care, prin natura lor, impun chiar metodele de investigare. În această perspectivă, trebuie înțeles faptul că principiul dualității este, cu precădere, caracteristic domeniului logicii simbolice și, în plus, la acest nivel el își poate dobîndi o analiză adecvată, prin intermediul mijloacelor tehnice pe care ni le oferă logica simbolică. Faptul că, date fiind toate acestea, principiul dualității își află manifestarea, într-o formă specifică, la nivelul formelor de gîndire studiate de logica tradițională, ni se pare un argument suplimentar în favoarea unității științei logicii, dar analiza principiului dualității din această perspectivă nu ni se pare a fi o chestiune de natura logicii însăși, ci, în primul rînd, de cea a metalogicii.

2. TEOREMELE LUI S$\rhd$ ȘI CP

După scurta prezentare a implicațiilor principiului dualității la nivelul logicii tradiționale, revenim în cadrul logicii simbolice, mai precis în cel al logicii standard și anume, la nivelul *CP*. Pentru a încerca să desprindem și alte aspecte privind prezența principiului dualității în cadrul domeniului anunțat, am socotit firesc ca, de această dată, referințele

la principiul dualității să fie făcute prin intermediul teoremelor dualității.

În acest sens, socotim necesar să facem unele precizări. Astfel, revenind asupra operatorilor *CP*, vom lua ca punct de plecare clasificarea lor din paragraful (1.3). În încercarea de a pune în evidență aspecte aplicative ale lui $S\triangleright$ pentru *CP*, în afara regulilor folosite pentru deducerea teoremelor dualității, vom utiliza, destul de frecvent, regula schimbului reciproc de echivalențe, de altfel și ea implicată în $S\triangleright$. În plus, teorema (32.19), cunoscută sub numele de „teorema negației", va fi utilizată sub forma unei definiții formale. Ca o convenție de scriere, toți operatorii binari și alături de ei, negația și dualitatea, vor fi redați după sistemul scrierii fără paranteze al lui J. Lukasiewicz, cu excepția echivalenței și aceasta numai în cazul în care echivalența îndeplinește funcția de operator principal, situație în care ea va fi redată prin semnul „$\equiv$", în maniera sistemului clasic de scriere cu paranteze. În sfîrșit, ultima precizare este aceea că vom dezvolta, de fapt, numai discuția asupra primilor patru operatori armonic conjugați, anume, cei care formează prima subclasă a clasei II — paragraful (1.3); discuția celorlalți operatori din perspectiva teoremelor dualității va fi restrînsă la unele referințe și la lista de formule consemnate în anexa nr. 1 de la sfîrșitul acestei lucrări.

Ca punct de plecare în studierea consecințelor lui $S\triangleright$ pentru *CP*, reluăm axiomele (32.1) și (32.2) din $S\triangleright$ și alături de ele, pe baza tabelelor nr. 1 și nr. 2 din primul capitol, încă patru formule :

(32.1) $[\triangleright\Phi^{n-1}pn \equiv \psi^{m-1}pm] \equiv [\Phi^{n-1}pn \equiv \triangleright\psi^{m-1}pm]$

(32.2) $[N\Phi^{n-1}pn \equiv \psi^{m-1}pm] \equiv [\Phi^{n-1}pn \equiv N\psi^{m-1}pm]$

(42.1) $\triangleright Apq \equiv Kpq$

(42.2) $\triangleright Dpq \equiv Xpq$

(42.3) $NApq \equiv Xpq$

(42.4) $NDpq \equiv Kpq$

Ca definiții, vom folosi expresiile:

(32.4) $\triangleright\Phi^{n-1}pn \equiv N\Phi^{n-1}Npn$

(32.19) $N\Phi^{n-1}pn \equiv \triangleright\Phi^{n-1}Npn$

iar ca reguli de deducție, alături de schimbul reciproc de echivalențe, vom folosi regulile din $S\triangleright$. În ceea ce privește substituția precizăm că, în contextul trecerii de la $S\triangleright$ la *CP*, formulele de bază ale lui $S\triangleright$ de tipul „$\Phi^{n-1}pn$", vor fi înlocuite cu formule de bază ale *CP*. Astfel, locul variabilei-operator „Φ" va fi luat de unul din operatorii *CP*, iar locul simbolului „pn" care desemna mulțimea variabilelor propoziționale conectate de operatorul denotat de „Φ" va fi luat de variabilele propoziționale p, q, ... De exemplu, printr-o astfel de înlocuire, expresia „$\Phi^{n-1}pn$" devine „Apq".

Folosind formulele de mai sus ca punct de plecare și luînd în considerație precizările făcute, putem deriva următoarele echivalențe ale *CP*:

(32.1): Φ/A, $\psi/K \times (R_3) = (42.1) \times (R_3)$ — (42.5)

(42.5) $\triangleright Kpq \equiv Apq$

(42.5) $\times (R_3) \times (32.4) = (42.6)$

(42.6) $Apq \equiv NKNpNq$

(32.2): Φ/A, $\psi/X = (42.3) \times (R_2)$ — (42.7)

(42.7) $Apq \equiv NXpq$

(32.1): Φ/D, $\psi/X \times (R_3) = (42.2) \times (R_2)$ — (42.8)

(42.8) $\triangleright Xpq \equiv Dpq$

(42.7) $\times$ (32.19)Φ/X = (42.9)

(42.9) $Apq \equiv DNpNq$

(42.6), (42.7) $\times (R_3) \times (R_4) = (42.10)$

(42.10) $NXpq \equiv NKNpNq$

(42.7), (42.9) $\times (R_3) \times (R_4) = (42.11)$

(42.11) $NXpq \equiv DNpNq$

(42.6), (42.9) $\times (R_3) \times (R_4) = (42.12)$

(42.12) $DNpNq \equiv NKNpNq$

(42.1) $\times (R_3) \times (32.4) = (42.13)$

(42.13) $Kpq \equiv NANpNq$

(32.2): Φ/D, $\psi/K = (42.4) \times (R_2)$ — (42.14)

(42.14) $NKpq \equiv Dpq$

(42.4) $\times (R_3) \times (32.19) \times$ (32.4)Φ/D = (42.15)

(42.15) $Kpq \equiv XNpNq$

(42.4), (42.13) $\times (R_3) \times (R_4) = (42.16)$

(42.16) $NDpq \equiv NANpNq$

(42.13), (42.15) $\times$ (R_3) $\times$ (R_4) = (42.17)

(42.17) $XNpNq \equiv NANpNq$

(42.4), (42.15) $\times$ (R_3) $\times$ (R_4) = (42.18)

(42.18) $NDpq \equiv XNpNq$

(42.8) $\times$ (R_3) $\times$ (32.4) = (42.19)

(42.19) $Dpq \equiv NXNpNq$

(42.14) $\times$ (R_3) $\times$ (32.19) $\times$ (32.4)Φ/K = (42.20)

(42.20) $Dpq \equiv ANpNq$

(42.14), (42.19) $\times$ (R_3) $\times$ (R_4) = (42.21)

(42.21) $NKpq \equiv NXNpNq$

(42.14), (42.20) $\times$ (R_3) $\times$ (R_4) = (42.22)

(42.22) $NKpq \equiv ANpNq$

(42.19), (42.20) $\times$ (R_3) $\times$ (R_4) = (42.23)

(42.23) $ANpNq \equiv NXNpNq$

(42.2) $\times$ (R_3) $\times$ (32.4) = (42.24)

(42.24) $Xpq \equiv NDNpNq$

(42.3) $\times$ (R_3) $\times$ (32.19) $\times$ (32.4) Φ/A = (42.25)

(42.25) $Xpq \equiv KNpNq$

(42.24), (42.3) $\times$ (R_3) $\times$ (R_4) = (42.26)

(42.26) $NApq \equiv NDNpNq$

(42.3), (42.25) $\times$ (R_3) $\times$ (R_4) = (42.27)

(42.27) $NApq \equiv KNpNq$

(42.24), (42.25) $\times$ (R_3) $\times$ (R_4) = (42.28)

(42.28) $KNpNq \equiv NDNpNq$

Echivalențele de mai sus epuizează posibilitățile de trecere de la un operator la altul, evident în cadrul subgrupului considerat al celor patru operatori — conjuncția, disjuncția, incompatibilitatea și „nici ... nici ...". Același număr de echivalențe pot fi obținute, în mod analog, și pentru ceilalți operatori binari ai *CP*, socotind acești operatori grupați în conformitate cu clasificarea din paragraful (1.3). Noi am înscris aceste echivalențe în anexa lucrării.

La o primă analiză, aceste formule, luate în ansamblul lor, ne dezvăluie căile de a trece de la un operator binar la alt operator binar — evident, în cadrul grupurilor constituite — o anumită diferență între ele fiind dată de modul deosebit în care negația s-a aplicat asupra unor părți diferite ale membrilor echivalențelor pe care le reprezintă formulele de mai sus.

Un fapt important este acela că toate aceste formule au fost obținute cu mijloacele puse la dispoziție de principiul dualității, prin intermediul lui $S\triangleright$. Dacă am lua în considerație definiția matricială a unora din operatorii subsumați grupului analizat, formulele (42.1) — (42.4), folosite ca punct de plecare în întemeierea echivalențelor de mai sus, ar putea fi obținute la rîndul lor prin folosirea formulelor (32.4) și (32.19) ca definiții. În consecință, putem spune că toate echivalențele înscrise aici între numerele (42.1) și (42.28), precum și cele înscrise între numerele (1) și (72) în anexă sînt, prin intermediul lui $S\triangleright$, consecințe ale principiului dualității, manifestări concrete ale sale.

Din șirul de formule cuprinse între numerele (42.5) și (42.28) un loc deosebit îl ocupă cele cunoscute sub numele de „legile lui Augustus De Morgan" și pe care, R. Carnap le numea chiar *legi duale* [11 p. 31]. Înscrise la numerele (42.6), (42.13), (42.22) și (42.27), ele se dovedesc, o dată în plus, a fi strîns legate de principiul dualității. Mai important decît aceasta este faptul că, printre formulele deduse, la numerele (42.19), (42.24), (42.18) și (42.11) găsim expresii care diferă de cele cunoscute sub numele de „legile lui Augustus De Morgan" numai prin operatorii la care se referă. Clasicele „legi ale lui Augustus De Morgan" sînt formulate la nivelul conjuncției și disjuncției, iar formulele (42.19), 42.24), (42.18) și (42.11) se referă la alți doi operatori: incompatibilitatea și „nici ... nici ...".

Dacă facem apel la formulele înscrise în anexă, vom constata același tip de legi logice pentru fiecare din grupurile de operatori ai *CP* luate în considerație. Pentru operatorii celui de al doilea subgrup al clasei II, formulele (30), (31), (39) și (46) din anexă sînt întrutotul similare legilor lui Augustus De Morgan pentru operatorii duali *C* și *M*, adică pentru implicația materială și negația implicației materiale inverse. Aceeași funcție este îndeplinită de formulele (27), (34), (42) și (43) din anexă, în cazul operatorilor duali *B* și *L*, adică pentru cazul implicației materiale inverse și al negației implicației materiale. Analiza formulelor înscrise în anexă corespunzător claselor de operatori binari I și III ne va duce la aceleași concluzii. De exemplu, pentru cazul operatorilor duali *E* și *J*, echivalența și disjuncția exclusivă, formulele (13), (18), (19) și (22) apar a fi analoage legilor lui A. De Morgan. Considerăm că citarea

și a altor exemple nu mai prezintă interes. Într-adevăr, operatorii auto-duali, înscriși în ultima clasă, nu apar în mod frecvent în cadrul *CP* și deci expresiile care, în cazul lor, ar fi analoage legilor lui A. De Morgan — adică formulele (51), (54), (57), (60), (61), (64), (67) și (70) nu au o altă menire decît de a arăta că nici acești operatori nu fac excepție de la linia căreia i se încadrează ceilalți operatori.

La fel, operatorii tautologie și contradicție, datorită situației lor speciale în cadrul *CP*, ne conduc la ideea că formulele de tipul celor discutate, corespunzătoare lor, pot fi citate tot cu sensul de a arăta că nici ei nu fac excepție în contextul discuției de aici. Este obișnuit a privi acești doi operatori numai ca puncte terminus în tabelul nr. 1, sau ca limite către care tind expresiile consistente, numite, poate, din această cauză, și *expresii realizabile*, sau, în sfîrșit, ca semn al legității logice sau al negației ei, contradicția, la nivelul calculului logic. Nu este obișnuit a ne imagina acești doi operatori, tautologia și contradicția, ca îndeplinind în calculul logic, o funcție asemănătoare celei pe care o îndeplinesc conjuncția, disjuncția sau implicația și, într-un anume sens, acest lucru nici nu este posibil. De aceea, pare oarecum nefiresc a pune problema transcrierii unuia din ei prin celălalt. E mult mai firesc a ne întreba cum arată o tautologie sau o contradicție, exprimată în limbajul altui operator, de exemplu al disjuncției sau al conjuncției, dar acest lucru nu constituie o problemă dificilă și nerezolvată încă. Caracterul oarecum abstract al tautologiei și al contradicției, realizat printr-o anume indiferență a acestor operatori față de valorile de adevăr ale enunțurilor pe care le conectează, însușire care se manifestă, într-o formă specifică, și în cazul echivalenței și disjuncției exclusive, face posibil faptul de a întîlni în anexă, în șirul de formule corespunzătoare operatorilor din prima clasă, unele grupări, în raport cu negația, întrutotul specifice acestor patru operatori. Dar ceea ce ne interesează pe noi este faptul că, operatorii din clasa I își găsesc două căi de a fi transcriși unul prin celălalt. Chiar dacă această chestiune a definirii unui operator prin altul nu prezintă interes pentru perechea tautologie-contradicție, nu același lucru se poate spune despre perechea echivalență-disjuncție exclusivă, cel puțin pentru faptul că ambii și-au găsit aplicații în calcule logice speciale [37].

În contextul lucrării prezintă interes faptul că fiecare din operatorii subsumați clasei I își găsește, în perspectiva unor formule analoage relațiilor lui A. De Morgan, două forme de definire. Remarcăm, cu acest prilej, că, pentru fiecare din operatorii *CP*, definirea printr-un alt operator, în perspectiva relațiilor lui A. De Morgan, înseamnă ***definirea unui anume operator prin referință la dualul său.***

Încă în primul capitol al lucrării cînd am ordonat operatorii *CP* în trei clase distincte, am stabilit că o caracteristică fundamentală a operatorilor înscriși în clasa I este aceea că pentru ei dualul este echivalent cu negația. Tocmai acest lucru îl explică formulele (8), (11), (21) și (24) din anexă.

În consecință, dacă luăm ca exemplu formula *Jpq*, atunci, în conformitate cu însușirea fiecărui operator din clasa I, dualul ei poate fi redat prin expresia *NJpq*. Conform formulei (32.4) însă, dualul aceleiași formule poate fi exprimat și sub forma *NJNpNq*. Prin urmare, întrucît, definirea echivalenței se va face prin referință la dualul său, formula *Epq* va avea posibilitatea de a fi definită, atît prin *NJpq* — conform formulei (13) din anexă — cît și prin *NJNpNq* — conform formulei (15) din anexă. Nu rezultă aici nici o abatere de la ideea pe care o urmărim căci, în fond, formula (13) din anexă ține de proprietatea operatorilor din clasa I de a avea dualul identic cu propria lor negație, iar formula (15) din anexă ține de expresia (32.4) ca definiție generală a dualității. Situația este aceeași pentru oricare din operatorii înscriși în prima clasă.

Am arătat mai sus că și operatorii înscriși în clasa III ar putea să ridice anumite îndoieli în ceea ce privește definiția generală a dualității și aplicabilitatea ei consecventă în trecerea de la un operator la altul. Dar, făcînd apel la analiza întreprinsă în paragraful (1.3), reamintim faptul că o particularitate fundamentală a acestor operatori este aceea de a fi autoduali. Tocmai această caracteristică a operatorilor din clasa III face ca definirea lor prin referință la dual să se realizeze prin reîntoarcerea la operatorul supus operației de definire cu ajutorul principiului dualității.

Evident, vorbind de definirea unui operator oarecare al *CP* nu uităm faptul că, făcînd abstracție de operația de definire prin referință la dual, există posibilitatea de a ocoli situațiile particulare ce se manifestă în cazul operatorilor din clasele

I și III, așa cum ar fi, de exemplu, definirea oricărui operator al *CP* prin conjuncție și negație. Dat fiind însă scopul lucrării, noi sîntem interesați, în primul rînd, de acel tip de definiție prin apel la dual. Din acest punct de vedere, situațiile particulare caracteristice operatorilor din clasele I și III se explică tocmai prin faptul că, în cazul lor, dualul se identifică fie cu negația operatorului supus operației de dualizare, fie cu însuși operatorul supus acestei operații. Această situație nu impune nici o modificare a concepției noastre despre dualitate, dar explică, cel puțin parțial, limitele principiale ale calculelor logice construite pe baza lor, evident, atunci cînd astfel de calcule sînt posibile. Arătăm că, depășind granițele claselor constituite de acești operatori, putem obține definirea lor prin intermediul conjuncției și negației de exemplu, dar este un lucru dovedit că nici unul din operatorii claselor I și III nu pot defini prin ei înșiși, sau cu ajutorul negației, pe toți ceilalți operatori ai *CP*.

Explicația acestei limite ține de particularitatea acestor operatori de a nu fi armonic conjugați.

Revenind acum la ansamblul formulelor din acest paragraf și la formulele din anexă, putem spune că aplicarea principiului dualității, prin intermediul lui $S\triangleright$, în analiza legăturilor dintre operatorii *CP*, confirmă distingerea acestor operatori în clase diferite — conform paragrafului (1.3) — și servește noi elemente în favoarea concluziilor noastre.

Utilizarea unor elemente ale lui $S\triangleright$ ne-a permis să obținem unele echivalențe care ni se par semnificative prin aceea că, pe baza lor, regăsim la nivelul tuturor operatorilor *CP*, legi logice analoage celor cunoscute sub numele de „legile lui A. De Morgan". Vizînd mai ales o latură utilitară, aceste legi ale lui A. De Morgan sînt privite ca definiții ale unui operator prin altul, în caz concret al conjuncției prin disjuncție și invers, sau ca posibilitate de a transcrie negația de pe o formulă pe variabilele ei propoziționale. Evident, sînt presupuse aici numai acele formule alcătuite cu ajutorul conjuncției sau disjuncției. Dar, am precizat acest lucru, un prim rezultat al desprinderii consecințelor lui $S\triangleright$ pentru operatorii binari ai *CP*, din acest punct de vedere, a fost faptul că, așa-numitele legi ale lui De Morgan țin numai în mod particular de cazul concret al legăturii dintre conjuncție și disjuncție. De fapt, ceea ce apare a fi general valabil pentru expresiile pe care le

discutăm este ideea că ele constituie semne concrete ale principiului dualității și aceasta chiar dacă ne-am limita la sensul lor de definiții. Aceasta s-ar explica prin acea lege a dualității, enunțată de W. Quine după care, dacă o expresie oarecare își află doi duali, mai bine spus, două forme de exprimare a dualului, atunci cei doi duali (în înțelesul de formule diferite care exprimă dualul) ai aceleiași expresii sînt echivalenți.

Un aspect semnificativ care poate fi remarcat în toate aceste formule — în legile lui Augustus De Morgan și în toate celelalte echivalențe analoage lor, prezente în acest paragraf sau în anexă — ține de principiul dualității și poate fi sesizat prin cunoscuta regulă a semnelor asociată legilor lui De Morgan. Acest aspect fundamental este redat, în forma sa generală, de definiția (32.4) din $S\triangleright$. În fond, considerăm că numai definiția (32.4) poate singură îndeplini în mod veritabil rolul legilor lui Augustus De Morgan. Ceea ce cunoscutele legi ale lui Augustus De Morgan exprimă pentru cazul particular al conjuncției și disjuncției, este exprimat la nivelul tuturor operatorilor *CP*, deci la nivel general, de formula (32.4). Echivalentele cunoscute sub numele de legile lui Augustus De Morgan ca și celelalte expresii analoage lor, existente în acest paragraf sau în anexă, nu sînt decît aplicații concrete ale formulei (32.4) ca definiție a dualității.

3. TEOREMELE LUI $S\triangleright$ ȘI CF

Caracterul general al lui $S\triangleright$, analiza efectuată asupra consecințelor sale în cadrul *CP*, precum și legăturile existente între *CP* și *CF*, ne permit să credem că, în ceea ce privește manifestările principiului dualității, prin intermediul teoremelor lui $S\triangleright$, în cadrul teoriei cuantificării, nu este necesar să insistăm prea mult. Ne mulțumim deci de a face doar unele observații cu caracter general.

Astfel, este bine cunoscut că, în cadrul *CF*, principiul dualității își află o manifestare directă în raportul dintre cuantificarea existențială și cea universală. Această idee se întemeiază pe faptul transcrierii cuantificatorului universal prin conjuncție și a celui existențial prin disjuncție. Presupunînd că

universul de discurs este limitat la n — obiecte — a_1, a_2, . . . a_n — formulele:

(43.1) $(\forall x)Px \equiv Pa_1Pa_2 \ldots . Pa_n$

(43.2) $(\exists x)Px \equiv Pa_1 \mathrm{v} Pa_2 \mathrm{v} \ldots . \mathrm{v}\ Pa_n$

consemnează legăturile dintre cei doi cuantori ai *CF* și cei doi operatori ai *CP*.

Drept rezultat al acceptării, în acest punct, a formulelor (43.1) și (43.2), putem deriva din ele expresiile:

(43.3) $\triangleright(\forall x)Px \equiv (\exists x)Px$

(43.4) $\triangleright(\exists x)Px \equiv (\forall x)Px$

care consemnează raportul de dualitate dintre cuantorul universal și cel existențial. Reamintim faptul că, ocupîndu-se de aplicarea principiului dualității în teoria cuantificării, W. Quine preciza că extinderea acestui principiu de la logica propozițiilor la teoria cuantificării este realizată, în primul rînd, prin tratarea cuantificării universale și a celei existențiale drept duale, una în raport cu cealaltă, după cum acest fapt este sugerat de strînsa legătură a acestor cuantori cu operatorii conjuncție și disjuncție. Cu același prilej, el făcea precizarea că, cea de a treia, a patra și a cincea lege a dualității enunțate de el*, pot fi restabilite pentru domeniul mai larg al *CF* [44 p. 107].

O primă consecință a definirii cuantorului universal și a celui existențial drept duali și a acceptării definirii lor prin conjuncție și respectiv disjuncție este faptul că, bine cunoscutele „echivalențe ale cuantorilor" pot fi tratate drept manifestări concrete ale principiului dualității, în aceeași manieră în care erau înțelese astfel și legile lui Augustus De Morgan. De fapt, este cunoscut că, acceptînd descrierea universalului prin conjuncție și a existențialului prin disjuncție, echivalențele cuantorilor apar ca o extindere a legilor lui Augustus De Morgan. În acest sens, ne putem permite a conchide că definiția reprezentată de formula (32.4) acoperă problemele dualității și pentru teoria cuantificării, dar evident, prin înțelesul ei și nu prin forma concretă în care ea apare în paragraful (3.2).

* Expunînd în linii generale înțelesul pe care W. Quine îl dă principiului dualității, noi am citat aceste legi încă în paragraful (1.2).

În momentul în care a fost alcătuită ca definiție a operatorului $\triangleright$, formula (32.4) a fost astfel construită încît ea să poată fi utilizată ca definiție a dualității la nivelul *CP* și al logicii propozițiilor căreia îi este asociat acest calcul. Cu toate asemănările dintre logica propozițiilor și logica predicatelor, cu tot aspectul de continuitate pe care logica standard îl presupune în trecerea de la primul la acest al doilea nivel al ei, fiecare din cele două domenii de investigație ale logicii standard se caracterizează prin trăsături particulare, se definesc ca distincte unul în raport cu celălalt. De aici urmează că definiția dualității, adaptată inițial cerințelor *CP*, va trebui să primească o exprimare adecvată cerințelor *CF*. Precizăm faptul că nu avem de a face cu o schimbare a concepției despre principiul dualității, ci doar cu o traducere dintr-o limbă în alta a definiției dualității.

Dar pentru a reda într-un mod corect definiția dualității în limbajul *CF* ni se pare semnificativ să ne oprim mai întîi, cu unele precizări, asupra limbajului *CF*. În primul rînd, vom distinge două tipuri de expresii în cadrul *CF*: formule închise și formule deschise. Formulele închise sînt de tipul $(\forall x)Px$, $(\forall x)(\exists y)Pxy$, $(\exists x)(\forall y)KPxy\ Qy)$ etc., adică formule în care cuantorul universal sau existențial prind toate variabilele obiect x, y, z ... care apar după literele predicat P, Q, R ... Prin opoziție, formulele deschise sînt de forma Px, Qxy, $(\exists x)KPxy\ Qy$ etc., adică astfel de expresii care conțin cel puțin o variabilă obiect liberă. În al doilea rînd, distingem între formule de minimă complexitate și formule complexe. Formulele de minimă complexitate, închise sau deschise, sînt alcătuite dintr-o singură literă predicat, iar cele complexe, la rîndul lor, deschise sau închise, sînt alcătuite din cel puțin două litere predicat conectate de unul din operatorii binari ai *CP*. Precizăm că, pentru moment, din punctul nostru de vedere, numărul variabilelor-obiect care urmează după o literă predicat poate fi oricît de mare, dar finit. În consecință, pentru moment, nu distingem între logica predicatelor monadice și logica predicatelor n—adice.

Revenind la definiția dualității, vom considera la început formulele de minimă complexitate. Precizăm că formulele deschise de minimă complexitate sînt, din punctul de vedere al principiului dualității, analoage cazului unei singure variabile propoziționale neafectată de nici un operator al *CP*.

Prin urmare, o astfel de expresie este propriul său dual. Astfel, dacă o asemenea expresie este redată prin Px_n, formula

$$(43.5)\quad \triangleright Px_n \equiv Px_n$$

obținută prin substituția în formula (23.20), poate fi socotită ca o definiție a dualului pentru cazul considerat.

La fel, dacă o astfel de formulă este alcătuită dintr-o singură literă predicat afectată de negație, formula:

$$(43.6)\quad \triangleright NPx_n \equiv NPx_n$$

obținută, la rîndul ei, prin substituție, în formula (23.19), exprimă definiția dualului pentru această situație.

Trecînd acum la formulele închise de minimă complexitate, convenim ca simbolul „k" așezat în fața unei litere predicat să fie interpretat ca o variabilă al cărei domeniu este alcătuit din două elemente: cuantorul universal, $(\forall x)$ și cuantorul existențial, $(\exists x)$. Dacă pornim de la definiția generală a dualității și de la formulele (43.1), (43.2), (43.3) și (43.4), putem considera că expresia:

$$(43.7)\quad \triangleright kPx_n = NkNPx_n$$

redă definiția dualității pentru tipul de formule închise de minimă complexitate. Definiția (43.7) se aplică în aceeași măsură și formulelor deschise de minimă complexitate de tipul $(\forall x)Pxy$.

O consecință imediată a acceptării formulei (43.7) drept definiție a operatorului $\triangleright$ la nivelul formulelor analizate rezultă prin simpla înlocuire a variabilei „k", în mod succesiv, cu cuantorul universal și cu cel existențial. Această consecință este redată de expresiile:

$$(43.8)\quad \triangleright(\forall x)Px_n \equiv N(\forall x)NPx_n$$
$$(43.9)\quad \triangleright(\exists x)Px_n \equiv N(\exists x)NPx_n$$

din care, operînd un schimb reciproc de echivalențe în baza formulelor (43.1) și (43.2), obținem:

$$(43.10)\quad (\exists x)Px_n \equiv N(\forall x)NPx_n$$
$$(43.11)\quad (\forall x)Px_n \equiv N(\exists x)NPx_n$$

Evident, pentru cazul în care variabila „k" ar fi fost afectată de negație, folosind și legea dublei negații sau (R_6) din $S\triangleright$, am fi putut deriva, într-un mod perfect analog și expresiile:

(43.12) $N(\exists x)Px_n \equiv (\forall x)NPx_n$
(43.13) $N(\forall x)Px_n \equiv (\exists x)NPx_n$

care, alături de formulele (43.10) și (43.11) exprimă toate posibilitățile de a trece de la un cuantor la celălalt și care, de fapt, sînt cunoscute sub numele de „echivalențele cuantorilor". În acest fel, noi considerăm că principiul dualității își manifestă prezența la nivelul formulelor de complexitate minimă ale *CF* într-un mod asemănător felului în care am constatat prezența sa la nivelul *CP*.

În consecință, putem afirma că „echivalențele cuantorilor" apar, analog legilor lui Augustus De Morgan, la nivelul *CP*, drept consecințe concrete ale principiului dualității. Legătura dintre „echivalențele cuantorilor" și principiul dualității poate fi confirmată prin intermediul definiției (43.7), iar legătura lor cu legile lui Augustus De Morgan poate fi atestată nu numai prin transcrierea cunatorului universal prin conjuncție și a celui existențial prin disjuncție, dar și prin așa-numita „regulă a semnelor" prezentă și aici ca și în cazul legilor lui Augustus De Morgan. Și într-un caz și în altul, noi vedem în „regula semnelor" un semn al principiului dualității pe care îl considerăm ca un veritabil termen mediu în legătura dintre legile lui Augustus De Morgan și „echivalențele cuantorilor".

Facem o singură observație, principiul dualității își află la nivelul *CF* — pentru moment ne restrîngem la domeniul formulelor analizate — aceleași implicații ca și la nivelul *CP*, remarcăm ideea că și de această dată vom putea constata existența unor formule armonic conjugate. Astfel, dacă luăm ca punct de plecare formula $(\forall x)Px_n$, dualul ei va fi formula $(\exists x)Px_n$, iar între cele două formule vom putea constata inferențe analoage raportului de subalternare. Negația formulei $(\forall x)Px_n$ va fi formula $(\exists x)NPx_n$ și între ele vom constata un raport de contradicție. În sfîrșit, formula luată ca punct de plecare își va afla dualul negației sale sau negația dualului său în formula $(\forall x)NPx_n$ cu care se va afla într-un raport

analog raportului de contrarietate. Inferențele posibile între aceste patru formule armonic conjugate pot fi redate prin schema:

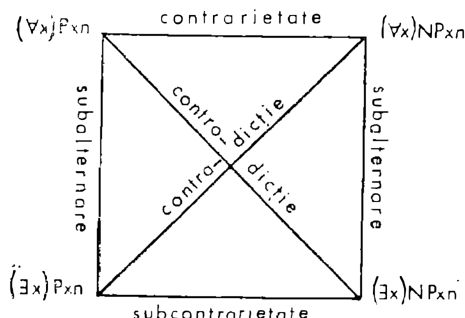


Figura 9 (43.1)

Pătratul logic alcătuit de formulele armonic conjugate obținute de noi în baza definiției (43.7) și cu ajutorul expresiilor (43.3), (43.4), (43.12) și (43.13), reprezentat de figura (43.1) prezintă o anumită importanță, cel puțin dacă ne gîndim la opiniile exprimate în legătură cu posibilitatea ca el să redea pentru cerințele *CF* raporturile dintre judecățile de predicație. Fără a intra în amănunte legate de aceste discuții, considerăm că pătratul logic din figura (43.1) vizează raporturi exclusiv între formule armonic conjugate ale *CF* și nu este o traducere a pătratului logic al judecăților de predicație și acest lucru, poate fi susținut chiar și pe baza principiului dualității. Astfel, o primă diferență fundamentală între judecățile de predicație și formulele care alcătuiesc pătratul logic de mai sus, este aceea că judecata de predicație, ca o anumită judecată de predicație după criteriul cantității și calității, își află dualul într-o altă judecată de predicație, dar, totodată, ea este alcătuită din termeni pentru care raportul de dualitate este intern, adică există între elementele structurale ale acestor termeni. În schimb, dacă ne oprim asupra formulelor de mai sus, deși prima caracteristică se realizează și la nivelul lor în sensul că fiind dată una din aceste formule ea își află dualul într-o altă formulă, totuși, despre cel de al doilea mod de manifestare a principiului dualității la nivelul acestor expresii nici nu poate fi vorba și aceasta rezultă chiar dacă ne limităm la faptul că existența acestor formule la nivelul *CF* impune o

interpretare a lor cu precădere extensivistă. E adevărat, fiecare formulă cuprinsă în pătratul logic din figura (43.1) își află dualul ei într-o altă formulă cuprinsă în aceeași diagramă, la fel cum o anumită judecată de predicație își află dualul într-o altă judecată de predicație, dar aceasta este un efect al proprietății acestor formule, pe de o parte, şi al judecăților de predicație, pe de altă parte, de a fi armonic conjugate. Dacă ne limităm la această proprietate, atunci, fără îndoială, pătratul logic din figura (43.1) este asemănător, dar nu mai mult, cu pătratul logic al judecăților de predicație şi cu oricare alt pătrat logic al unor expresii armonic conjugate, așa cum ar fi cele din figurile (14.1), (14.2) și (16.1). Dar, dacă luăm în considerație natura elementelor între care se stabilesc raporturile înscrise în pătratele logice menționate, atunci sîntem nevoiți a respinge posibilitatea identificării dintre aceste scheme logice diferite. Numai cu titlul de exemplu dorim să amintim o problemă care face din pătratul logic din figura (43.1) o schemă specifică *CF*. Astfel, dacă ar fi nevoie să punem în evidență, prin intermediul unor implicații, raporturile de subalternare din cadrul acestui ultim exemplu de pătrat logic, necesitatea unor supoziții suplimentare referitoare la elementele raportului, ar putea fi, într-un fel, ocolită numai prin apel la deducția naturală.

Ne reîntoarcem acum la definiția dualității pentru a aborda, pe baza ei, formulele deschise complexe. Vom opera mai întîi o nouă distincție. Astfel, dacă luăm în considerație formule deschise complexe în alcătuirea cărora nu apare nici un cuantor, ele pot fi tratate, din punctul de vedere al principiului dualității, ca și cum ar fi obținute prin substituție în formule ale *CP*. De exemplu, formula „CPx_nQy_m" poate fi tratată în același fel ca formula „*Cpq*", deci prin aplicarea definiției (32.4) din S▷. Menționăm că, pentru a ocoli reîntoarcerea, în fiecare caz în parte, la o formulă a *CP* este suficient ca elementul „*pn*" din alcătuirea formulei (32.4) să fie schimbat cu „*Pn*" care ar desemna mulțimea literelor predicat conectate de operatorul (operatorii) desemnați de „Φ". Dată fiind o astfel de situație, nu socotim necesar să mai insistăm asupra acestui tip de formule complexe. Posibilitatea de a extinde și asupra lor toate concluziile noastre anterioare referitoare la principiul dualității este evidentă.

În cazul în care, o formulă deschisă complexă conține și unul sau mai mulți cuantori, ea presupune o tratare oarecum deosebită. Astfel, în aplicarea operației de dualizare unei asemenea formule trebuie să ținem seamă pe de o parte de existența cuantorilor și, pe de altă parte, de existența operatorilor binari care apar în această formulă. În această situație, partea din expresia considerată, care este acoperită de cuantor, este tratată mai întîi conform definiției (43.7), iar pe de altă parte, operatorii acestei expresii, cei care ies dincolo de referința cuantorilor sau nu sînt tratați conform definiției (32.4). Dualul formulei date a fost obținut numai după aplicarea ambelor definiții, iar pentru aplicarea mai întîi a definiției (43.7), prima parte a formulei, cea acoperită de cuantor, va fi tratată ca și cum ar fi o singură literă predicat. De exemplu, fiind dată formula „$K(\forall x)CPx_nQx_mPy_j$", aplicarea definiției (43.7) va avea ca rezultat formula „$K(\exists x)CPx_nQx_mPy_j$", iar completarea operației de dualizare, aplicînd și definiția (32.4) ne va duce la expresia „$A(\exists x)MPx_nQx_mPy_j$" care poate fi definită drept dualul primei expresii. Altfel spus, pentru a obține dualul unei astfel de expresii, mai întîi pentru partea expresiei acoperită de cuantor, se înlocuiește cuantorul universal cu cel existențial și invers, în baza definiției (43.7), iar operatorul (operatorii) *CP* care se află în expresie se înlocuiesc prin dualul său (dualii lor), conform formulelor corespunzătoare din paragraful (4.2) sau din anexă. Pentru a simplifica operația de dualizare a unei astfel de formule, putem proceda direct pe baza formulelor (43.3) și (43.4) în ceea ce privește cuantorii existenți în expresia dată și pe baza formulelor corespunzătoare din paragraful (4.2) și din anexă, în ceea ce privește operatorii *CP* care apar în alcătuirea expresiei date. Operația de dualizare se reduce în acest caz la simpla schimbare reciprocă a elementelor duale. Pe baza discuției de mai sus, concluziile noastre anterioare privind principiul dualității pot fi extinse și asupra formulelor deschise complexe care conțin unul sau mai mulți cuantori.

A mai rămas de analizat un singur tip de expresii ale *CF* și anume, expresiile închise complexe. Pornind de la cazurile anterior analizate, considerăm că aceste ultime formule nu necesită o discuție specială din punctul de vedere al aplicării asupra lor a operației de dualizare. Într-adevăr, ținînd seama și de această dată că o astfel de formulă cuprinde atît unul

sau mai mulți cuantori cît și unul sau mai mulți operatori ai *CP*, este suficient să arătăm că, pentru obținerea dualului unei asemenea expresii, ca și în cazul anterior, avem doi pași. Pe de o parte, se aplică definiția (43.7) asupra cuantorilor și, pe de altă parte, se aplică definiția (32.4), asupra operatorilor *CP* care intervin în această expresie. Într-o formă mai simplă, dualul unei asemenea expresii poate fi obținut numai prin schimbarea reciprocă a elementelor duale, posibilă de realizat în virtutea acelorași formule invocate în cazul anterior cu același scop. Concluzia la care ajungem și de această dată nu face excepție de la cazurile anterioare. În acest fel, putem susține că definiția dualității acceptată inițial acoperă în mod consecvent întregul domeniu al logicii standard. Același lucru poate fi asertat și despre teoremele lui $S\triangleright$ ca și despre toate celelalte proprietăți ale relației de dualitate. Este neîndoielnic că și la nivelul *CF* poate fi constatată prezența principiului dualității, atît în forma sa generală, cît şi sub aspectul mai concret al unor teoreme ale dualității specifice *CF*, așa după cum expresiile din paragraful (4.2) și din anexă sînt specifice *CP*. Nu considerăm însă că este necesar să procedăm la o desfășurare amănunțită a acestor teoreme.

În schimb, înainte de a încheia, dorim să revenim, în perspectiva *CF*, la proprietatea unor expresii ale logicii standard de a fi armonic conjugate și aceasta într-un context particular. Astfel, uneori se consideră că formulele armonic conjugate care formează pătratul logic din figura (43.1) nu reprezintă o transcriere adecvată a judecăților de predicație și că ele ar trebui înlocuite cu următoarele expresii:

(43.14) $(\forall x)\ CPxQx$ — pentru judecata *A*
(43.15) $(\forall x)\ CPxNQx$ — pentru judecata *E*
(43.16) $(\exists x)\ KPxQx$ — pentru judecata *I*
(43.17) $(\exists x)\ KPxNQx$ — pentru judecata *O*

Evident, nu puțini autori resping ideea că cele patru formule de mai sus ar fi o traducere absolut corectă a judecăților de predicație. Nici de această dată nu dorim să intrăm în amănunte privind discuțiile în legătură cu această problemă, ci intenționăm doar să prezentăm o observație pe care ne-o favorizează principiul dualității. Astfel, este știut faptul că

cele patru judecăți de predicație pot fi definite ca patru elemente logice armonic conjugate. Pentru ca formulele de mai sus să corespundă măcar în linii foarte generale, din punct de vedere al raporturilor dintre ele, judecăților de predicație, ar trebui să fie la rîndul lor patru expresii armonic conjugate. Luînd ca punct de plecare formula (43.14), ea își află negația în formula (43.17). La fel, formula (43.15) își află negația în formula (43.16). Evident, o singură problemă a mai rămas de rezolvat şi anume, dacă formula (43.14) își află sau nu dualul în formula (43.16) sau, în mod echivalent, dacă formula (43.15) își află sau nu dualul în formula (43.17). Un răspuns afirmativ la oricare din aceste chestiuni ar rezolva problema pusă inițial în mod pozitiv.

Pe baza analizei efectuate pe parcursul acestui paragraf rezultă că dualul formulei (43.14) este expresia:

(43.18) $(\exists x)MPxQx$

care diferă de formula (43.16). La fel, dualul formulei (43.15) este expresia

(43.19) $(\exists x)MPxNQx$

care nu este echivalentă cu formula (43.17). Nu discutăm aici în ce măsură cele patru formule considerate inițial pot alcătui sau nu un pătrat logic consistent — ne îndoim de această posibilitate — dar ținem să subliniem că ele diferă substanțial față de judecățile de predicație prin aceea că, spre deosebire de acestea din urmă, formulele (43.14), (43.15), (43.16) și (43.17) nu se dovedesc a fi patru elemente logice armonic conjugate. Am revenit acum în final, în contextul acestei discuții, asupra proprietății unor expresii ale logicii standard de a fi armonic conjugate doar în intenția de a mai oferi încă un exemplu privind utilitatea studiului principiului dualității și a proprietăților sale.

Fără a avea pretenția de a fi epuizat prezentarea implicațiilor principiului dualității la nivelul *CF* și evident, nici la nivelul logicii formale în genere, noi credem că din cele pînă acum discutate, principiul dualității se dovedește un argument suplimentar în favoarea unității logicii.

V

CONSIDERAȚII FINALE

Înainte de a încheia încercarea noastră de a prezenta manifestările principiului dualității în logica formală, dorim să revenim, sub forma unor observații generale, pe cît posibil într-o manieră concisă, asupra unor idei care au făcut obiectul diverselor paragrafe ale acestei lucrări.

Mai întîi, ne vom opri atenția asupra definiției dualității. Am arătat chiar de la început că, prin termenul „dualitate" noi înțelegem o relație de corespondență între două grupuri de elemente. Această relație de corespondență este de un tip special, întrucît ea presupune, printr-o operație de inversare, o simetrie absolută între elementele care constituie aceste grupuri. Această corespondență simetrică vizează, în cazul logicii standard, constantele 1 și 0. Într-o formă specifică, o astfel de simetrie se manifestă și la nivelul formelor logice studiate de logica tradițională.

Pornind tocmai de la o serie de concepte familiare logicii tradiționale, e necesar să facem unele precizări. Astfel, logica clasică recunoaște existența a patru feluri de raporturi între enunțuri: contrarietatea, contradicția subcontrarietatea și subalternarea. Dintre aceste patru raporturi, primele trei sînt așa-numite raporturi de opoziție. O problemă care se cere lămurită este dacă dualitatea, concepută ca un raport între două enunțuri, fie ele simple propoziții sau expresii mai complexe, se confundă cu vreunul din aceste raporturi sau nu. Noi considerăm că ridicarea unei asemenea chestiuni nu este deloc lipsită de sens și cînd afirmăm acest lucru avem în vedere faptul că unii autori, A. C. Leisenring ar fi un exemplu,

susțin că dualitatea dintre conjuncție și disjuncție este o contrarietate [30 p. 15—16]. La fel, dacă am fi acceptat definiția pe care I. Copi o dă dualității, s-ar fi putut susține chiar mai mult şi anume, relația de dualitate ar fi fost considerată drept raportul de contradicție.

Discuția noastră referitoare la pătratul logic al dualității, precum şi exemplele oferite anterior, ne conduc la concluzia că relația de dualitate diferă de raporturile clasice de opoziție. Definiția dualității acceptată de noi respinge din principiu o identificare între dualitate și raportul de contradicție, iar dacă ar fi vorba totuşi de o încercare de a apropia relația de dualitate de unul din raporturile specifice pătratului logic clasic, atunci cel mult s-ar putea vorbi de o corelație între dualitate și subalternare, dar subalternarea nu pare a fi posibil să fie gîndită în mod propriu ca un raport de opoziție. În orice caz, subalternarea este net diferită de raportul de contrarietate.

Rămînînd în continuare la nivelul unei comparații între dualitate și conceptele logicii tradiționale, putem afirma că dualitatea, concepută de această dată ca o operație logică, diferă și față de inferențele imediate dintre judecățile de predicație. Logica tradițională a descoperit și a analizat, în afara raporturilor înscrise în pătratul logic al judecăților de predicație, patru tipuri de inferențe imediate la nivelul judecății de predicație. Pornind de la ideea că operația de dualizare este realizabilă prin intermediul negației, de la început este exclusă o apropiere între dualizare și conversiune. Rămîne în discuție o eventuală apropiere între dualizare și una din aceste inferențe imediate între judecăți de predicație care utilizează, la rîndul lor, negația: contrapoziția, obversa conversei și inversiunea.

Dacă avem în vedere modul concret în care negația este implicată în cadrul realizării acestor inferențe imediate și felul în care negația a fost utilizată în aplicarea operației de dualizare judecăților de predicație — paragraful (4.1) — rezultă că operația de dualizare este diferită și față de aceste inferențe. Chiar dacă facem o apropiere între așa-numita inversiune pe care o presupune dualitatea ca operație și conversiunea judecăților de predicație, implicată alături de negație în realizarea celorlalte inferențe imediate la nivelul judecății de predicație, nu putem ocoli faptul că ceea ce numim „in-

versiune" în cadrul operației de dualizare se poate traduce prin intermediul negației, dar conversiunea rămîne o operație de „inversare" a funcției logice a noțiunilor care joacă rol de termeni ai judecății de predicație și această „inversare" nu este realizabilă prin intermediul negației. Mai departe, revenind la contrapoziție, obversa-conversei și la inversiunea judecăților de predicație, îndeplinirea acestor inferențe presupune intervenția negației pe termenii judecății și pe legătura dintre acești termeni. În mod diferit, aplicarea operației de dualizare în cazul judecăților de predicație presupune intervenția negației asupra cuantorului și asupra copulei judecății de predicație. De aici, făcînd apel la modalitatea concretă de obținere a dualului unei judecăți de predicație în raport cu felul în care se realizează fiecare din inferențele imediate cu judecăți de predicație, citate mai sus, se poate conchide că dualitatea este deosebită, concepută ca operație, de aceste inferențe. Cel mult, comparînd dualizarea și o dată cu ea inferențele imediate, pe de o parte, cu negația, pe de altă parte, s-ar putea spune că ele, în ansamblul lor, epuizează toate posibilitățile de abordare a unei judecăți de predicație prin intermediul negației.

A reieșit că dualitatea, concepută ca relație sau ca operație, diferă atît față de raporturile de opoziție dintre judecățile de predicație, cît și față de celelalte inferențe imediate cu astfel de judecăți și aceasta prin modul specific de alcătuire a dualului unui enunț. Revenind acum la nivelul logicii standard și ținînd seama de felul în care negația este implicată în definirea dualului unei expresii oarecare, precizăm faptul că abordarea unei formule prin intermediul negației poate fi realizată în mod diferit. Astfel, fiind dată, să spunem, conjuncția „*Kpq*", formulele „*NKpq*", „*KNpNq*" și „*NKNpNq*" epuizează posibilitățile de intervenție a negației asupra formulei inițiale.* Renunțînd la definiția pe care I. Copi a dat-o dualului, în conformitate cu care dualul formulei „*Kpq*" ar fi fost formula „*NKpq*", noi am acceptat o astfel de definiție a dualității, după care dualul lui „*Kpq*" este formula „*NKNpNq*".

Respingînd definiția lui I. Copi am avut în vedere faptul că identificarea dintre negație și dual face cel puțin inutilă

* Evident, mai există și posibilitățile „*KpNq*" și „*KNpq*", care însă nu prezintă interes din punctul nostru de vedere.

noțiunea de dual și în plus, impune o serie de complicații suplimentare în analiza statutului logic al celorlalte două formule. Mai mult, raportul dintre dual și formula inițială presupune, în concepția noastră, o simetrie completă între elementele constitutive ale formulelor considerate. Luînd ca punct de plecare formula „*Kpq*" putem constata o astfel de simetrie completă numai comparînd această formulă cu ultima expresie din șirul de mai sus, „*NKNpNq*". Acceptînd o anumită definiție a dualității, în primul rînd pentru că o considerăm drept singura definiție capabilă să ne ofere o noțiune de dualitate distinctă față de alte concepte ale logicii moderne, am fost obligați să ne oprim și asupra formulelor de tipul „*NKpq*" și „*KNpNq*", să încercăm o analiză a statutului lor logic și a legăturilor dintre aceste formule și expresia inițială, pe de o parte, precum și a legăturilor dintre aceste formule și dualul formulei inițiale, pe de altă parte. Reamintim faptul că, după ce identifică dualul unei anumite expresii cu negația ei, I. Copi nu vorbește nimic despre formule de tipul „*KNpNq*" și „*NKNpNq*".

Atunci cînd am analizat definiția pe care I. Copi o dă dualității, am precizat că o astfel de înțelegere a conceptului de dualitate, deci a principiului dualității, constituie o excepție, cel puțin în raport cu autorii pe care noi i-am consultat. Revenind asupra acestei chestiuni, dorim să cităm opinia lui W. H. Gottschalk, care afirmă ca un lucru bine cunoscut că principiul dualității apare atît în sistemele logice cît și în cele matematice. Dezvoltînd această idee, W. H. Gottschalk distinge între negația unui enunț, contradualul și dualul aceluiași enunț. În conformitate cu ideile cuprinse în studiul la care ne referim, există posibilitatea unor ambiguități în înțelegerea modului în care negația trebuie aplicată pentru a obține dintr-o formulă oarecare „Φ" negația ei, notată „Φ^N", contradualul ei, „Φ^C" și dualul acestei formule, „Φ^D". Modalitatea indicată de W. H. Gottschalk pentru a distinge, prin intermediul aplicării negației în obținerea lor, între aceste formule, este echivalentă cu aceea folosită de noi pentru obținerea dintr-o expresie oarecare a negației, a predualului și a dualului ei. Singura deosebire este aceea că în locul noțiunii de contradual, am folosit noțiunea de predual și aceasta pentru că am utilizat noțiunea de predual în special pentru

clarificarea procedeului de definire matricială a operatorului $\triangleright$.

Totodată, tratînd cele patru formule ca distincte, am arătat că ele pot constitui, în anumite condiții, un grup de expresii armonic conjugate. Atît prin intermediul proprietății unor astfel de expresii de a fi armonic conjugate, proprietate care ar putea fi exprimată și prin numele „legea conjugării armonice", cît și prin intermediul unor teoreme din $S\triangleright$ noi am păstrat în continuare noțiunea de predual sub forma de negație a dualului sau de dual al negației formulei inițiale. Aceasta ne-a permis o tratare completă a raporturilor dintre cele patru tipuri de expresii considerate mai sus.

În ceea ce privește însă proprietatea sau legea conjugării armonice, avem datoria unei precizări. Astfel, W. H. Gottschalk, după ce indică procedeele de obținere din expresia „Φ" a formulelor „Φ^N", „Φ^C" și „Φ^D", arată că raporturile dintre ele sînt guvernate de *legea cuaternalității* (the law of quaternality), care ca metateoremă se exprimă după cum urmează:

$$(5.1)\ \Phi^{NN} = \Phi^{CC} = \Phi^{DD} = \Phi$$
$$\Phi^{CD} = \Phi^{DC} = \Phi^{N}$$
$$\Phi^{DN} = \Phi^{ND} = \Phi^{C}$$
$$\Phi^{NC} = \Phi^{CN} = \Phi^{D}$$
$$(5.2)\ \vdash \Phi^N \leftrightarrow \sim\Phi, \vdash \Phi^C \leftrightarrow \sim\Phi^D, \vdash \Phi^D \leftrightarrow \sim\Phi^C\ *$$

Luînd în considerație teoremele lui $S\triangleright$, putem susține că atît formulele din grupul (5.1), cît și cele din grupul (5.2), dispun de o întemeiere formală în cadrul lui $S\triangleright$. Prin urmare, legea cuaternalității enunțată de W. H. Gottschalk nu se opune analizei noastre a principiului dualității ci, dimpotrivă, este implicată în această analiză.

Cu toate acestea, nu se poate vorbi de o identitate între legea cuaternalității și legea conjugării armonice. Ele sînt asemănătoare, dar totodată ele diferă principial. Punctul lor comun constă în aceea că ambele vizează un grup de patru expresii dintre care, una fiind luată ca expresie de bază, celelalte trei pot fi definite ca negație, contradual sau pre-dual (dualul negației sau negația dualului) și dual în raport cu prima ex-

* În grupul de formule (5.2) semnul „$\sim$" desemnează operatorul negație, iar semnul „$\leftrightarrow$" operatorul echivalență.

presie. Dar, dacă legea cuaternalității se limitează la acest fapt fiindu-i indiferent dacă cele patru expresii sînt principial distincte sau nu, legea conjugării armonice impune ca o condiție necesară faptul că cele patru expresii pe care ea le guvernează, sub aspectul raporturilor dintre ele, să fie distincte, în sensul precizat în paragrafele (1.5) și (1.6).

Pentru a indica și mai clar deosebirea dintre cele două legi, remarcăm faptul că, așa după cum susține W. H. Gottschalk, dacă patru expresii au fost astfel obținute una din alta încît ele să fie conforme legii cuaternalității, atunci ele pot fi ordonate într-o diagramă care descrie grupul cuaternalității într-o manieră geometrică, adică printr-un pătrat [20 p. 194]. Noi ținem însă să menționăm că, dacă cele patru expresii corespund numai legii cuaternalității, pătratul lor logic nu va putea consemna, în mod cert, între aceste expresii, aceleași raporturi pe care le prezintă pătratul logic clasic. Legea cuaternalității se situează la un nivel foarte general și principala ei finalitate este de a elimina ambiguitățile care pot interveni în construcția negației, a contradualului (predualului) și a dualului unei expresii date, dar din punctul ei de vedere, într-un anume sens, natura raporturilor care se stabilesc între aceste patru expresii este indiferentă. Astfel, dacă facem apel la exemplele oferite de noi anterior prin figurile (14.1), (14.3), (16.1), la care adăugăm pătratul logic clasic al judecăților de predicație, legea cuaternalității nu ne oferă nici un criteriu pentru a distinge între ele aceste scheme logice. Oricare din aceste pătrate logice și oricare altele care sînt posibile de construit în baza legii cuaternalității apar doar drept exemple, drept aspecte particulare ale legii cuaternalității. Acest fapt se explică, prin aceea că legea cuaternalității, fără îndoială esențial legată de principiul dualității, nu este specifică manifestărilor logice ale principiului dualității, ci vizează acest principiu ca o lege comună tuturor științelor formale și în primul rînd matematicii și logicii, la un loc. În acest sens, este explicabil ca ea să nu vizeze natura intimă a raporturilor dintre cele patru expresii ci numai existența lor și posibilitățile de a fi obținute pe calea unor operații formale. Cînd vorbim despre „natura intimă" a acestor raporturi ne gîndim la faptul că P. R. Halmos susținea deschis că matematicile nu se interesează de problemele fundamentale care îi preocupă pe logicieni [22 p. 9], adică, în chestiunea pe care o discutăm

aici, pentru matematici este indiferent că aceste raporturi se realizează ca inferențe de la valoarea de adevăr a unei expresii la valoarea de adevăr a unei alte expresii. Noi nu vedem în aceasta o limitare de ordin negativ a matematicilor, ci un punct care explică de ce matematicile și logica, cu toate relațiile extrem de strînse dintre ele, sînt totuși două științe diferite, cu două domenii deosebite de investigare. La fel, această situație nu ne duce la concluzia de a respinge legea cuaternalității ci, dimpotrivă, la a susține caracterul ei general în raport cu natura principiului dualității.

Pe de altă parte, în abordarea implicațiilor logice ale principiului dualității, legea cuaternalității explică numai existența a patru expresii dintre care, una fiind punct de plecare, pe baza operațiilor presupuse de legea cuaternalității, celelalte trei apar a fi negația, contradualul, (predualul) și dualul celei dintîi, dar nu ne asigură un criteriu cert pentru a ști în ce măsură aceste patru expresii pot da naștere unui pătrat logic consistent. Tocmai în acest punct intervine legea conjugării armonice și dacă avem în vedere particularitățile unor expresii care se bucură de proprietatea de a fi armonic conjugate, anterior expuse, atunci putem considera că legea conjugării armonice preia semnificația legii cuaternalității, fără însă a o anula pe aceasta, pentru cazul particular al manifestărilor specific logice ale principiului dualității și, în consecință, ne oferă un criteriu sigur pentru a ști dacă patru expresii, detectabile, dar nu mai mult decît ca patru expresii și prin legea cuaternalității, pot forma cu certitudine un pătrat logic consistent. În aceasta noi vedem nu numai un specific al legii conjugării armonice în raport cu legea cuaternalității ci și un argument pentru a susține legea conjugării armonice ca adecvată manifestărilor logice ale principiului dualității.

O a doua problemă asupra căreia dorim să ne oprim acum, în final, este legată de lărgimea domeniului în care, la nivelul logicii, principiul dualității își face manifestată prezența. După cum arătam în primul paragraf al introducerii, universul de discurs al științei logicii este astăzi extrem de larg și diversificat. Urmînd clasificarea făcută tot atunci, putem spune că noi ne-am ocupat de manifestările logice ale principiului dualității numai în cadrul logicii standard, mai precis, în cadrul logicii propozițiilor și al logicii predicatelor. Am mai putea adăuga încercarea de a sesiza în ce măsură se poate vorbi

de o implicare a principiului dualității în domeniile abordate și cu atît mai puțin putem avea pretenția de a fi epuizat manifestările specific logice ale principiului dualității. Considerăm însă că, în cuprinsul lucrării am desprins cîteva aspecte esențiale privind logica principiului dualității care, prin caracterul lor general, o dată ce au fost întemeiate și pe o cale formală în cadrul lui $S\triangleright$, pot fi extinse și dincolo de granițele logicii standard. Considerăm că o condiție necesară a unei astfel de lărgiri a perspectivelor logice ale principiului dualității este extinderea definiției dualității, sau altfel spus, de a arăta că această definiție acoperă un domeniu mult mai larg decît cel al logicii standard.

Evident, în măsura în care vorbim de aplicarea definiției dualității și la alte nivele ale logicii decît cele cercetate pînă acum, este firesc să asimilăm unele noțiuni noi în raport cu cele deja utilizate pentru definirea dualului unei expresii oarecare a logicii standard. Astfel, dacă dorim o extindere a definiției discutate pentru logica claselor, în obținerea dualului, în locul negației, urmează a fi folosită operația de obținere a complementului, iar dacă abordăm logica relațiilor, aceeași operație de obținere a dualului se realizează prin complementare și conversiune. Mai departe, pentru aplicarea teoriei dualității în logica modală este necesar să definim ca duale enunțurile: „este necesar *p*" și „este posibil *p*". Fără a intra în amănunte și deci mulțumindu-ne doar cu indicarea căilor prin care pot fi sesizate implicațiile principiului dualității în logica claselor, în logica relațiilor și în logica modală, dorim să subliniem faptul că această extindere a definiției dualității nu modifică cu nimic fondul acestei definiții.

La aceeași concluzie vom ajunge și dacă încercăm aplicarea acestei definiții la nivelul logicilor polivalente standard sau non-standard. Vom lua două exemple. Astfel, dacă plecăm de la definiția matricială a conjuncției în sistemul trivalent Lukasiewicz — Tarski și definiția matricială a negației în același sistem:

K	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

N	
1	0
1/2	1/2
0	1

operînd în cadrul matricii conjuncției (*K*) toate schimbările pe care le presupune obținerea definiției matriciale a dualului conjuncției, vom obține drept rezultat definiția prin valoare de adevăr a disjuncției:

A	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1
1	1	1	1

În felul acesta am obținut un exemplu privind aplicarea nemodificată a definiției dualității. Așa cum la nivelul bivalenței aplicarea operației de dualizare asupra conjuncției are drept rezultat obținerea disjuncției, tot la fel, la nivelul trivalenței, conjuncția și disjuncția sînt operatori duali.

Mai departe, dacă luăm în considerație matricea conjuncției și a negației proprii sistemului de calcul intuiționist și operînd și în acest caz schimbările cerute de aplicarea operației de dualizare asupra conjuncției, rezultatul va fi matricea disjuncției. Întrucît pentru calculul intuiționist numai matricea negației diferă în raport cu matricile luate mai sus (ne referim numai la operatorii care intră în discuția de aici) vom cita doar matricea negației și pe cea a dualului conjuncției.

N	
1	0
1/2	0
0	1

A	0	0	1
0	0	0	1
0	0	0	1
1	1	1	1

În legătură cu aplicarea definiției dualității asupra definițiilor matriciale ale operatorilor calculului intuiționist, se impune o observație. Astfel, dacă încercăm să obținem dualul unei singure variabile propoziționale afectate de negație, adică încercăm aplicarea operației de dualizare asupra operatorului *N*, concluziile anterioare au deplină valabilitate, în sensul că operatorul *N* este un operator *auto-dual*. Dar, modificările matricii negației, în conformitate cu cerințele operației de dualizare, ne vor conduce la o matrice a negației în bivalență, așa cum acest lucru s-a întîmplat, de fapt, și în cazul trecerii, prin aceeași operație de dualizare, de la conjunc-

ție la disjuncție. Matricea cuprinde tot trei poziții, dar două dintre ele conțin aceeași valoare de adevăr, valoarea de adevăr *fals*. Acest fapt se datorește felului în care negația este definită în cadrul calculului intuiționist și în fond nu afectează cu nimic definiția dualității acceptată de noi.

În conluzie, avînd în vedere precizările făcute, putem considera că deși analiza principiului dualității a fost făcută de către noi numai la nivelul bivalenței, ideile la care am ajuns pe baza acestei analize au o valabilitate mai largă decît domeniul logicii standard și aceasta fără a opera modificări de principiu asupra definiției dualității acceptată inițial. În acest fel, nu numai analiza principiului dualității, a proprietăților sale, ne-a dus la concluzii ce acoperă și alte ramuri ale logicii moderne, dar și aplicațiile sale, prin intermediul teoremelor lui $S\triangleright$, par să acopere o arie mult mai largă, decît cea prezentată pînă acum. Discuția noastră privind consecințele acestor teoreme în cadrul *CP* și *CF* nu apare decît ca un exemplu privind aplicabilitatea principiului dualității. Alte exemple pot fi obținute, într-o manieră asemănătoare, la nivelul logicii claselor, la nivelul logicii relațiilor, al logicii modale, al logicilor polivalente standard și non-standard.

Conținutul principal al acestor aplicații ale principiului dualității, discutate și exemplificate pînă acum, este acela că ele ne oferă, în cadrul logicii standard, sau la nivelul altor ramuri ale logicii moderne, prin intermediul teoremelor lui $S\triangleright$ și prin intermediul proprietăților sale, înțelese uneori ca „legi ale dualității", un mijloc simplu, dar în același timp riguros, pentru fundamentarea unor teoreme. Reamintim în acest sens discuția din paragraful (3.4), în legătură cu teorema (32.8) din $S\triangleright$, sau exemplul geometriei proiective — paragraful (0.2).

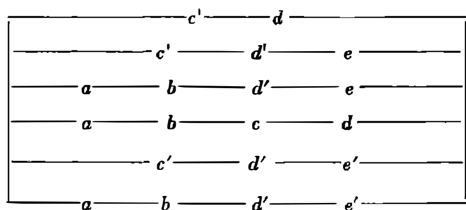
Faptul că putem întemeia anumite teoreme fără o demonstrație specială, ci bazîndu-ne pe demonstrația altor teoreme, ne permite simplificarea într-o anumită măsură a teoriei logice și pe de altă parte, ne servește în descoperirea unor noi teoreme. Astfel, o analiză completă a operatorilor *CP*, de exemplu, poate fi realizată numai pe baza discuției a unei jumătăți din numărul acestor operatori. Concluziile la care s-a ajuns în fiecare caz în parte, pot fi extinse asupra dualilor lor.

Dar sub acest aspect aplicativ, principiul dualității are o semnificație mult mai largă. Este, suficient a aminti că el

însoțește, prin manifestările sale, logica și în aplicațiile ei la alte domenii ale cunoașterii.

Principiul dualității își manifestă prezența și la nivelul logicii modale. De aici putem conchide că prezența acestui principiu va putea fi constatată și la nivelul logicii deontice, pornind de la ideea că cele patru categorii deontice: obligativitate, interdicție, permisivitate, indiferență sînt analoage categoriilor modale necesitate, imposibilitate, posibilitate, contingență. În același sens, remarcăm utilizarea principiului dualității, prin intermediul unui sistem logic adecvat, în decizia socială. Această aplicabilitate a conceptului de dualitate este probată de Y. Murakami în legătură cu analiza conceptelor de autonomie și neutralitate socială [40 p. 31—35].

Încheiem șirul exemplelor privind aplicațiile principiului dualității dincolo de granițele științei logicii, dar prin intermediul aplicațiilor logicii, amintind legătura care există între teoria formelor normale din logica standard și teoria contactelor electrice. Urmînd, în acest sens, ideile lui N. L. Thomas [50 p. 153—175], remarcăm faptul că, dată fiind schema unui circuit:



în care a este înțeles drept un contact deschis, iar a' drept un contact închis, ea este reprezentabilă printr-o formă normală disjunctivă:

$$c'd \vee c'd'e \vee abd'e \vee abcd \vee c'd'e' \vee abd'e'$$

Dar, dacă schema acestui sistem de contacte este reprezentabilă printr-o astfel de schemă logică, atunci dualul acestei expresii va desemna schema unui circuit care poate fi definită drept duala schemei de mai sus. Principiul dualității își află utilitatea în acest domeniu în legătură cu aflarea căilor de simplificare a sistemelor de contacte, cu găsirea caracteristicilor lor matriciale etc. Pentru a oferi un exemplu suplimentar,

amintim și faptul că teorema negației, formula (32.19) din $S\triangleright$, își află o aplicație directă în stabilirea complementarei unei scheme de contacte dată [50 p. 173].

Evident, în aplicațiile principiului dualității dincolo de granițele științei logicii trebuie să avem în vedere că acest aspect al principiului dualității este favorizat de existența acestui principiu nu numai la nivelul logicii formale în genere, ci și în cadrul matematicilor. În introducerea lucrării ne-am oprit numai asupra unui caz particular al existenței principiului dualității în matematică, geometria proiectivă, dar avem certitudinea că implicațiile sale acoperă un domeniu mult mai larg în universul de discurs al matematicilor. Chiar în introducere ne-am referit la realizările unor matematicieni și logicieni în studierea principiului dualității sub aspectul manifestărilor sale în algebră, în special în algebra booleană. Am amintit acum numai faptul că, așa cum arată S. Vajda, el este implicat la nivelul programării matematice în legătură cu problemele optimizării [52 p. 31—47], sau faptul și mai general, indicarea concretă, de către W. H. Gottschalk, a căilor pe care principiul dualității poate fi regăsit la nivelul oricărui sistem algebric prin intermediul legii cuaternalității [20 p. 195—196].

Oferind o serie de exemple privind aspectul aplicativ al principiului dualității, am avut în primul rînd în vedere manifestările de natură logică ale acestui principiu. Evident, imaginea acestor aplicații poate fi lărgită, dacă am lua în considerație și modalitatea în care principiul dualității este prezent în matematică, dar o astfel de chestiune depășește obiectivele lucrării noastre.

Apreciem exemplele de pînă acum suficiente, pentru a ne putea permite să considerăm că studiul principiului dualității are o semnificație majoră. Dar înainte de a vorbi despre aplicațiile principiului dualității ca temei al analizei proprietăților sale, credem că, pentru logicieni, importanța studierii acestui principiu ține și de faptul că el este implicat într-o serie de probleme fundamentale ale științei logicii. Sperăm că ideile care fac obiectul capitolelor prezentei lucrări sînt în măsură să convingă de aceasta. Mai mult, avem speranța că studiul principiului dualității, așa cum el a fost întreprins pe parcursul lucrării, nu numai că servește elemente noi privind analiza conexiunilor logice, a proprietăților unor operatori, dintre

care citām în primul rînd negația, dar ne oferă și anumite aspecte noi, fundamentale, de înțelegere și explicitare a formelor logice studiate de logica tradițională. Dacă pentru cazul logicii standard am cita un singur exemplu și anume legea conjugării armonice ca semn al unei importante proprietăți a relațiilor dintre conexiunile logice, legat de manifestările principiului dualității în teoria noțiunii, am remarca concluziile privind raportul dintre elementele structurale ale noțiunii, cele privind legăturile dintre noțiunile gen și specie și am adăuga implicarea principiului dualității în raporturile dintre judecățile de predicație.

Pentru a putea oferi o cunoaștere cît mai riguroasă a proprietăților principiului dualității și a legăturilor sale cu alți operaotri ai *CP*, am realizat o interpretare a operației de dualizare în sensul unui operator logic și pe baza proprietăților formale ale acestui operator am trecut la analiza, pe o cale formalizată, în cadrul lui $S\triangleright$, a principiului dualității sub aspectul proprietăților sale și a raporturilor sale față de celelalte concepte fundamentale ale logicii moderne. Acest tip de analiză nu știm să mai fi fost aplicat pînă acum în studiul principiului dualității, dar principalul său merit constă, în aceea că el ne-a permis să dobîndim o rigoare specifică unui sistem formalizat în intemeierea proprietăților principiului dualității și, totodată, ne-a asigurat posibilitatea de a discuta despre dualitate în mod riguros și la nivel general. Semnificația acestui fel de a discuta despre principiul dualității este întregită de faptul că ea ne-a oferit criterii certe privind extinderea concluziilor noastre și dincolo de granițele logicii standard.

Lucrarea a fost consacrată exclusiv studierii principiului dualității din punctul de vedere și cu mijloacele științei logicii. Din conținutul ei se poate desprinde concluzia că, prin manifestările sale diverse, prin proprietățile sale generale, acest principiu acoperă știința logicii în ansamblul ei. În acest fel, am înțeles să vorbim de principiul dualității ca un argument suplimentar în favoarea unității logicii, fără a respinge însă veritabila diversitate pe care o presupune logica contemporană, diversitate, de altfel, dovedită chiar de manifestările diferite ale principiului dualității. Și chiar mai mult decît atît existența principiului dualității nu numai în logică, ci și în matematică poate constitui un punct din perspectiva căruia să fie aduse elemente noi pentru clarificarea legăturilor

dintre știința logicii și știința matematicilor. Dar aceste ultime chestiuni țin de un domeniu mult mai general. Ele sînt probleme constitutive pentru teoria sistemelor formale și pentru metalogica filosofică.

Nu intenționăm să ne oprim pe larg asupra unei asemenea chestiuni, dar am dorit doar să consemnăm cîteva observații de natură generală pe care ni le-a favorizat studiul principiului dualității. Un punct de plecare pentru aceste observații este ideea că relația de dualitate între două expresii logice (luăm termenul „expresie logică" într-un sens foarte general pentru a acoperi orice fel de elemente duale) constă într-o simetrie totală, atît sub aspectul elementelor structurale ale acestor expresii, cît și sub aspectul lor de întreg constituit. În plus, dat fiind faptul că această simetrie se realizează prin intermediul negației, diferența dintre cele două expresii este maximă, dar, prin existența relației de dualitate, ele se presupun reciproc în sensul că fiecare expresie își găsește în dualul său „altul" său, reversul său total.

În această perspectivă, se ridică problema: de ce cînd e vorba de tautologie, de lege logică și de contradicție, sau de echivalență și de disjuncție exclusivă, dualul corespunde cu negația? Într-un fel aceeași alterare a diferenței presupusă de relația de dualitate apare, e adevărat, într-un fel oarecum deosebit, și atunci cînd considerăm autodualii. Deosebirea constă numai în aceea că aici dualul se confundă cu expresia inițială. Nu cumva acest lucru se datorește faptului că în aceste cazuri funcțiile de adevăr respective se realizează ca o absolutizare a unui aspect din structura lor, într-o anumită anulare a laturilor diverse presupuse de obiectul funcției, anulare realizată sub forma unei indiferențe față de aceste laturi?

Dacă luăm în considerație conjuncția, disjuncția, implicația — cu toate formele ei — incompatibilitatea și operatorul „nici ... nici ...." se poate constata că valoarea de adevăr a funcției ca întreg se realizează ca o unitate, ca o sinteză unitară a laturilor deosebite pe care le presupune respectiva funcție de adevăr. Conjuncția desemnează coexistența unor elemente, dar prin dualitatea sa față de disjuncție această coexistență este realizată drept coexistență a unor elemente distincte. La rîndul ei, implicația, prin însuși faptul că este o succesiune presupune distingerea elementelor conectate în antecedent și consecvent.

Oricare din acești operatori, pe care i-am caracterizat drept armonic conjugați, face ca valoarea de adevăr a funcției alcătuite de ei să nu depindă numai de unul din componenți — cazul operatorilor din clasa III — nici ca ea să fie indiferentă față de valorile lor — tautologie și contradicție — și nici nu se stabilește numai pe baza identității lor — echivalența — sau numai pe baza distincției lor — disjuncția exclusivă. Dintre toți acești operatori ne vom opri mai ales asupra perechii tautologie-contradicție, căci, în sensul de lege logică și de negație a legii logice ei sînt fundamentali pentru formalizarea logicii.

Dacă acestea sînt lucruri reale, atunci pare firesc că nu e posibil a idealiza formalizarea logică căci, prin însăși natura ei, tautologia, sub aspectul ei de lege, exprimă lumea — cum spunea Wittgenstein — dar, dată fiind indiferența pe care o presupune, deci caracterul ei limitat, ea exprimă lumea numai ipotetic, numai pe o latură a ei. Dacă reducem lumea la această latură, dacă absolutizăm legea logică, e firesc ca orice lege logică să fie, în toate sensurile, echivalentă ca oricare altă lege logică și totul sfîrșește într-o indistincție absolută. În plus, este normal să apară paradoxele pentru că se pretinde că legea logică exprimă totul și într-adevăr, ea exprimă tot ce a rămas după ce a fost anulată posibilitatea de a distinge, de a sesiza ce este diferit. Absolutizînd, în această direcție, legea logică, este ușor să facem încă un pas pentru a obține concluzii filosofice pesimiste cu privire la posibilitatea cunoașterii umane. Considerăm că, în acest sens, Lukasiewicz avea perfectă dreptate cînd spunea că logica nu are nimic de a face cu gîndirea mai mult decît ar avea de a face cu ea matematica, dacă facem abstracție de gîndirea reală și de realitate în sens plenar. Tot aici își află un punct real de sprijin intuiționismul în critica sa împotriva formalismului și logicismului, numai că și acest curent intuiționist sfîrșește la fel cu formalismul și logicismul atunci cînd absolutizează diferența în detrimentul unității.

Este un lucru asemănător pentru toate sistemele axiomatice, care deși diferite în mecanismul lor, cu toate că pornesc de la operatori din clasa II, dacă este dus la limită, la axiome și teoreme, ajunge la anularea diferenței care era presupusă inițial. Trebuie să respingem axiomatizarea? În nici un caz nu, pentru că, dincolo de faptul că ea constituie o mare realizare a minții umane, veritabila ei valoare stă în aceea că ea ne ser-

vește pentru a epuiza, pe o cale riguroasă — calea necesității logice —, pînă la ultimele ei limite, analiza tuturor inferențelor posibile, ne servește să epuizăm toate concluziile ce decurg din anumite date. A proceda axiomatic înseamnă a avea certitudinea asupra drumului de la axiome la teoreme și în acest sens deziderатul lui Hilbert pare justificat, deși un sistem axiomatic nu înseamnă a avea întreaga lume sau întreaga gîndire, cu toate laturile lor exprimate perfect în axiome și teoreme.

Datele inițiale sînt date veritabile, dar ele sînt numai *anumite* date. Deci, adevărurile exprimate de sistemul axiomatic prin legile lui sînt relative la aceste date și sînt ipotetice dincolo de ele. Este în fond o reluare cu alte mijloace și în alte condiții de analiză a ceea ce Aristotel spunea despre silogism — „ceva fiind dat, altceva decurge cu necesitate" — dar, totdeauna, o reflexie asupra sistemului axiomatic trebuie să aibă în vedere faptul că a fost dat numai *ceva* și că de aici a decurs cu necesitate *altceva* și că necesitatea logică nu este o rațiune suficientă pentru a crede, fie că a fost dat *totul*, fie că a decurs cu necesitate *totul*.

Valoarea sistemului axiomatic ar fi mai ales aceea de a permite o analiză completă a consecințelor și nu, în primul rînd, de a fi o unealtă de descoperire în sensul în care, obiectul efortului de investigare ar fi realitatea sau gîndirea, fiecare concepute plenar. Pe această latură, de a fi unealtă de descoperire mai fructuoasă, apare deducția naturală și străduințele depuse spre lărgirea perspectivelor axiomatizării, așa cum acestea s-au realizat pe linia calculului protothetic al lui Lesniewski, sau a metodelor semantice inițiate de Beth. În același context, deși cu mijloace diferite, înțelegem și încercarea de către P. Botezatu a unei logici operatorii.

Pericolul prezent și într-un caz și în altul, dar mai ales în cazul sistemului axiomatic, este acela de a absolutiza legea logică. În eventualitatea unei astfel de situații, nu este greu a presupune, explicit sau implicit, că întreaga lume s-a redus la o lege logică sau la un ansamblu de legi logice. Ca rezultat, paradoxele apar în mod firesc. Semnul, poate numai semnul, că o tautologie prezintă un astfel de pericol, că ea permite o asemnea interpretare, este indistincția dintre dual și negația formulei inițiale. Printr-o astfel de indistincție, tautologia se opune dualului său ca tot ceea ce este în afara tautologiei.

Opoziția dintre tautologie și dualul său este absolută, prin excludere reciprocă și nu prin presupunere reciprocă, pentru că tautologia și dualul său epuizează, în mod formal, întreaga lume.

În această perspectivă, ni se pare justificat a susține că logica este știință despre gîndire, dar ea nu a reușit și nici nu va reuși vreodată, prin ea însăși numai, să epuizeze în mod absolut cunoașterea gîndirii. Ar fi numai o iluzie să credem că, așa cum spunea I. Kant, logica e o știință încheiată, că istoria ei s-a sfîrșit și ar fi și mai grav să credem că ea a spus deja totul despre obiectul investigațiilor sale. Logica este în mod esențial știință despre gîndire, dar redusă la tautologie ea nu mai corespunde gîndirii în sensul în care gîndirea există ci numai unei tendințe, unei posibilități prin care gîndirea — ca proces de raționare — s-ar realiza în măsura în care ea ar dispune de niște cunoștințe absolute pe care să le ia drept premise ale demersului logic. Ar fi oarecum o contradicție în subiect a absolutiza legea logică, căci ar însemna a privi legea logică ca expresie a gîndirii în ansamblul ei. Înseamnă a confunda gîndirea ca un dat, ca aceea ce ea este de fapt în ansamblul ei, cu numai una din tendințele ei de realizare sub aspectul procesualității logice.

Noi considerăm că principiul dualității, atunci cînd are posibilitatea de a se manifesta plenar în cazuri concrete, sau înțeles ca un principiu care acoperă întregul univers de discurs al științei logicii, impune respingerea unei limitări absolutizante, caracteristică tautologiei, și cere, în mod necesar, o corelație între unitate și diferență. Prin aceasta însă, am depășit nivelul formal, granițele logicii. O corelație între principiul dualității și unitatea identitate-diferență este și sîntem convinși, va fi în continuare, obiectul filosofiei logicii.

ANEXA

Utilizarea axiomelor (32.1) și (32.2) și a definițiilor (32.4) și (32.19), precum și a regulilor de deducție din $S\triangleright$, la care adăugăm regula schimbului reciproc de echivalențe, ne duce la următoarele echivalențe pentru grupurile de operatori binari ai *CP*, distinse prin clasificarea după criteriul dualității, din paragraful (1.3):

1. *Clasa I* (*operatorii V, O, E și J*)

1. Vpq ≡ VNpNq
2. Vpq ≡ NOpq
3. Vpq ≡ NONpNq
4. Opq ≡ ONpNq
5. Opq ≡ NVpq
6. Opq ≡ NVNpNq
7. VNpNq ≡ NOpq
8. NOpq ≡ NONpNq
9. VNpNq ≡ NONpNq
10. ONpNq ≡ NVpq
11. NVpq ≡ NVNpNq
12. ONpNq ≡ NVNpNq
13. Epq ≡ NJpq
14. Epq ≡ ENpNq
15. Epq ≡ NJNpNq
16. Jpq ≡ NEpq
17. Jpq ≡ JNpNq
18. Jpq ≡ NENpNq
19. NJpq ≡ ENpNq
20. ENpNq ≡ NJNpNq
21. NJpq ≡ NJNpNq
22. NEpq ≡ JNpNq
23. JNpNq ≡ NENpNq
24. NEpq ≡ NENpNq

2. *Clasa II — subgrupul* (c_2) *(operatorii B, C, L, M)*

25. Bpq ≡ NMpq
26. Bpq ≡ CNpNq
27. Bpq ≡ NLNpNq
28. Cpq ≡ NLpq
29. Cpq ≡ BNpNq
30. Cpq ≡ NMNpNq
31. NMpq ≡ CNpNq
32. CNpNq ≡ NLNpNq
33. NMpq ≡ NLNpNq
34. NLpq ≡ BNpNq
35. BNpNq ≡ NMNpNq
36. NLpq ≡ NMNpNq
37. Mpq ≡ NBpq
38. Mpq ≡ LNpNq
39. Mpq ≡ NCNpNq
40. Lpq ≡ NCpq
41. Lpq ≡ MNpNq
42. Lpq ≡ NBNpNq
43. NBpq ≡ LNpNq
44. LNpNq ≡ NCNpNq
45. NBpq ≡ NCNpNq
46. NCpq ≡ MNpNq
47. MNpNq ≡ NBNpNq
48. NCpq ≡ NBNpNq

3. *Clasa III (operatorii F, G, H, I)*

49. Fpq ≡ INpNq
50. Fpq ≡ NIpq
51. Fpq ≡ NFNpNq
52. Gpq ≡ HNpNq
53. Gpq ≡ NHpq
54. Gpq ≡ NGNpNq
55. Hpq ≡ GNpNq
56. Hpq ≡ NGpq
57. Hpq ≡ NHNpNq
58. Ipq ≡ FNpNq
59. Ipq ≡ NFpq
60. Ipq ≡ NINpNq
61. NIpq ≡ INpNq
62. NIpq ≡ NFNpNq
63. INpNq ≡ NFNpNq
64. NHpq ≡ NGNpNq
65. HNpNq ≡ NHpq
66. HNpNq ≡ NGNpNq
67. GNpNq ≡ NGpq
68. NGpq ≡ NHNpNq
69. GNpNq ≡ NHNpNq
70. FNpNq ≡ NFpq
71. NFpq ≡ NINpNq
72. FNpNq ≡ NINpNq

Obținerea expresiilor cuprinse în această anexă presupune, în afara formulelor invocate inițial, utilizarea unora din ele ca punct de plecare, pentru fiecare caz în parte. Drumul de la axiomele, teoremele, definițiile și regulile lui $S \triangleright$ la echivalențele de mai sus este analog cu cel parcurs în paragraful (4.2) pentru obținerea seriei de formule (42.1) — (42.28).

ABSTRACT

The book is devoted to a problem more familiar to mathematicians than to logicians and its principal aim is to discuss the questions of duality involved in formal logic. Although many books and papers on modern logic are not containing any references to the principle of duality we could find two different ways to define it. The first, is quite common for almost all logicians and in brief it means to regard duality between two logical formulas as a complete symmetry by negation. The second is I. Copi's definition that identifies duality and negation. Following a preliminary discussion of those opposite definitions we bring in some arguments to reject I. Copi's concept of duality.

Taking into account the principle of duality as a symmetry by negation we could point out some differences among two-valued logic functors and some properties of duality and the relations between duality and others logical functors. The main point here is to find with the help of duality a special connection between some logical formulas called by us „the law of harmonical conjugation". That law is different from W. H. Gottschalk's "law of quaternality" (JSL, vol. 18, No. 3, p. 193), because it enables us not only to find four formulas that could be arranged in a square as a geometrical pattern, but to discover such formulas to arrange them in a square as a logical pattern similar to the traditional square of oppositions.

We introduce a special functor of duality briefly called $\triangleright$. Using truth-values tables we define $\triangleright$ and its properties. Further we built up an axiomatic system of duality called S$\triangleright$. In order to prove the theorems of duality we used only

threc axioms and finally we checked the consistency of S$\triangleright$. We had the opportunity to discuss some consequences of S$\triangleright$ for propositional and functional calculi. As an example, among these consequences we suppose the simplification of elementary logic, but we regard the principle of duality as involved inside the modal and the standard or non-standard many-valued logics too. At the same time we discussed some aspects of duality in traditional logic.

Well known in mathematics as a result of an involution in each mathematical system the principle of duality presents some particular features in its logical appearance. In this respect we find here a point for further discussions concerning the relationships between logic and mathematics. We think that the principle of duality may be regarded as standing at the level of formal sciences for an universal principle of symmetry. But more than that. We suppose it could be used to explain some experimental findings which have violated the classical idea of symmetry.

BIBLIOGRAFIE

1. R. J. Ackermann, *An Introduction to Many-Valued Logics*, Routledge and Kegan Paul, London, 1967.
2. R. J. Ackermann, *Modern Deductive Logic*, Mac Millan and Co. Ltd., London, 1970.
3. L. Baer, *Linear Algebra and Projective Geometry*, Academic Press Publishers, New York, 1952.
4. A. H. Barson and D. J. O'Connor, *Introduction to Symbolic Logic*, University Tutorial Press, London, 1959.
5. E. T. Bell, *Men of Mathematics*, The Whitefriars Press Ltd., London, Pelican Books, 1965.
6. P. Bieltz, *The Logical Square of Duality*, Acta Logica, nr. 11, 1968.
7. P. Bieltz and M. D. Bîrliba, *Some remarks about the Excluded Middle*, Acta Logica, Nr. 13, 1970.
8. P. Bieltz și M. D. Bîrliba, *Logica în perspectiva Caietelor filozofice* de V. I. Lenin, „Revista de filozofie", nr. 1, 1974.
9. G. Birkoff and J. V. Neuman, *The Logic of Quantum Mechanics*, Annales of Mathematics, vol. 37, 1936.
10. R. Blanché, *Introduction à la Logique Contemporaine*, Librairie Armand Colin, Paris, 1957.
11. R. Carnap, *Introduction to Symbolic Logic* and *Its Applications*, Dover Publications, Inc., New York, 1958.
12. Al. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, vol. I, Princeton University Press, 1956.
13. I. Copi, *Symbolic Logic*, The Mac Millan Company, New York, 1967.
14. H. S. M. Coxeter, *Projective Geometry*, Blaisdell Publishing Co., New York — London — Toronto, 1964.
15. H. B. Curry, *Foundations of Mathematical Logic*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York — San Francisco — Toronto — London, 1963.
16. Gh. Enescu, *Introducere în logica matematică*, Editura Științifică, București, 1965.

16a. Gh. Enescu, *Logica Simbolică*, Editura Științifică, București, 1971.

17. M. Esser, *Self-dual postulates for n — Dimensional Projective Geometry*, Duke Mathematical Journal, vol. 18, 1951.
18. H. G. Forder, *Geometry, Hutchinson's University Library*, London, 1950.
19. R. L. Goodstein and E. J. F. Primrose, *Axiomatic Projective Geometry*, University College Leicester, 1953.
20. W. H. Gottschalk, *The Theory of Quaternality*, Journal of Symbolic Logic, vol. 18/3, 1953.
21. J. A. Green, *Sets and Groups*, Routledge and Kegan Paul, London, 1967.
22. P. R. Halmos, *Algebraic Logic*, Chelsea Publishing Co., New York, 1962.
23. A. Heyting, *Axiomatic Projective Geometry*, North Holland Publishing Co, Amsterdam, 1968.
24. D. Hilbert and W. Ackermann, *Principles of Mathematical Logic*, Chelsea Publishing Co., New York, 1950.
25. Ath. Joja, *Studii de Logică*, vol. I, Editura Academiei, Bucureşti, 1960.
26. Ath. Joja, *Studii de Logică*, vol. 2, Editura Academiei, Bucureşti, 1966.
27. G. Keene, *First Order Functional Calculus*, Routledge and Kegan Paul, London, 1967.
28. S. C. Kleene, *Mathematical Logic*, John Wisley and Sons Inc., New York, 1967.
29. L. Le Blanc, *Dualité pour les égalités booléene*, Comptes Rendus de l'Academie de Sciences, Nr. 250, 1960.
30. A. C. Leisenring, *Mathematical Logic and Hilbert's ε Symbol*, Mc. Donald Co., London, 1969.
31. P. Lorenzen, *Formal Logic*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht-Holland, 1965.
32. C. I. Lewis and C. H. Langford, *Symbolic Logic*, Dover Publications Inc., New York, 1959.
33. J. Lukasiewicz, *Aristotle Syllogistic from the standpoint of Modern Formal Logic*, Oxford University Press, 1957.
34. E. Luschei, *The Logical Systems of Lesniewski*, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1962.
35. B. Mates, *Elementary Logic*, Oxford University Press, 1965.
36. E. A. Maxwell, *The Methods of Plane Projective Geometry*, Cambridge University Press, 1948.
37. E. Mihăilescu, *Logica matematică*, Editura Academiei, Bucureşti, 1969.
38. Gr. C. Moisil, *Încercări vechi şi noi de logică neclasică*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1965.
39. A. De Morgan, *On the Syllogism*, Routledge and Kegan Paul Ltd., London, 1966.
40. Y. Murakami, *Logic and Social Choice*, Routledge and Kegan Paul Ltd., London, 1968.
41. P. H. Nidditch, *Introductory Formal Logic of Mathematics*, University Tutorial Press Ltd., London, 1957.
42. A. N. Prior, *Formal Logic*, Oxford University Press, 1963.

43. W. v. O. Quine, *Mathematical Logic*, Harper and Row Publishers New York, 1951.
44. W. v. O. Quine, *Methods of Logic*, Routledge and Kegan Paul, London, 1952.
45. W. v. O. Quine, *Elementary Logic*, Harper and Row Publishers, New York, 1965.
46. R. Stoichiță, *La Transcription du carré Logique en Calcul Propositionnel*, Acta Logica, nr. 6, 1963.
47. R. Stoichiță, G. Öffenberger, P. Bieltz, *Cu privire la unele proprietăți ale operatorilor logici în calculul propozițional*, „Cercetări Filozofice", nr. 2, 1963.
48. P. F. Strawson (ed.), *Philosophical Logic*, Oxford University Press, 1968.
49. P. Suppes, *Introduction to Logic*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1969.
50. N. L. Thomas, *Modern Logic*, Barnes and Noble Inc., New York, 1969.
51. M. Tîrnoveanu, *Elemente de Logică Matematică*, Editura Pedagogică, București, 1964.
52. S. Vajda, *Mathematical Programing*, Addison-Wesley Co., Inc., London, 1961.
53. J. E. Whitesitt, *Boolean Algebra and Its Applications*, Addison-Wesley Publishing Co., Ltd., London, 1961.
54. F. B. Wright, *Some remarks on Boolean duality*, Portogaliae Math., Nr. 16, 1957.
55. F. B. Wright, *Polarity and duality*, Pacific Journal of Mathematics, Nr. 10, 1960.

CUPRINSUL

IV

V